

二重ベータ崩壊原子核行列要素計算の現状

日野原 伸生

筑波大学計算科学研究センター
原子核理論研究室



Nov. 8, 2018

宇宙の歴史をひもとく地下素粒子原子核研究
京大・A班共催二重ベータ崩壊若手研究会

発表計画

- インTRODクシヨン
 - 二重ベータ崩壊と原子核行列要素

- 原子核構造の基礎
 - 殻構造
 - 平均場近似

- 原子核行列要素計算の理論
 - 殻模型
 - QRPA
 - GCM

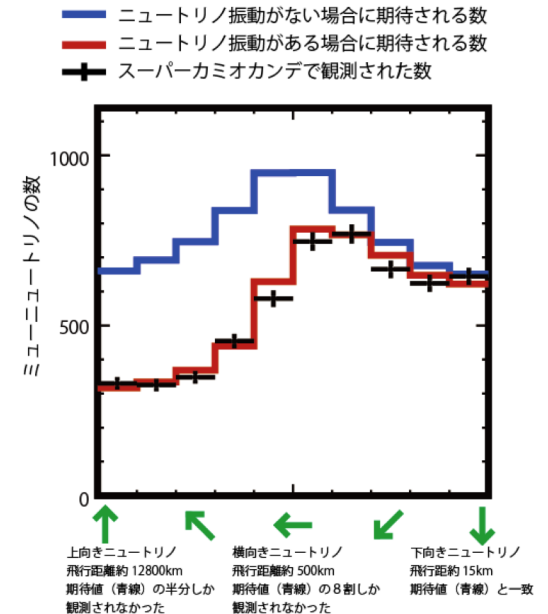
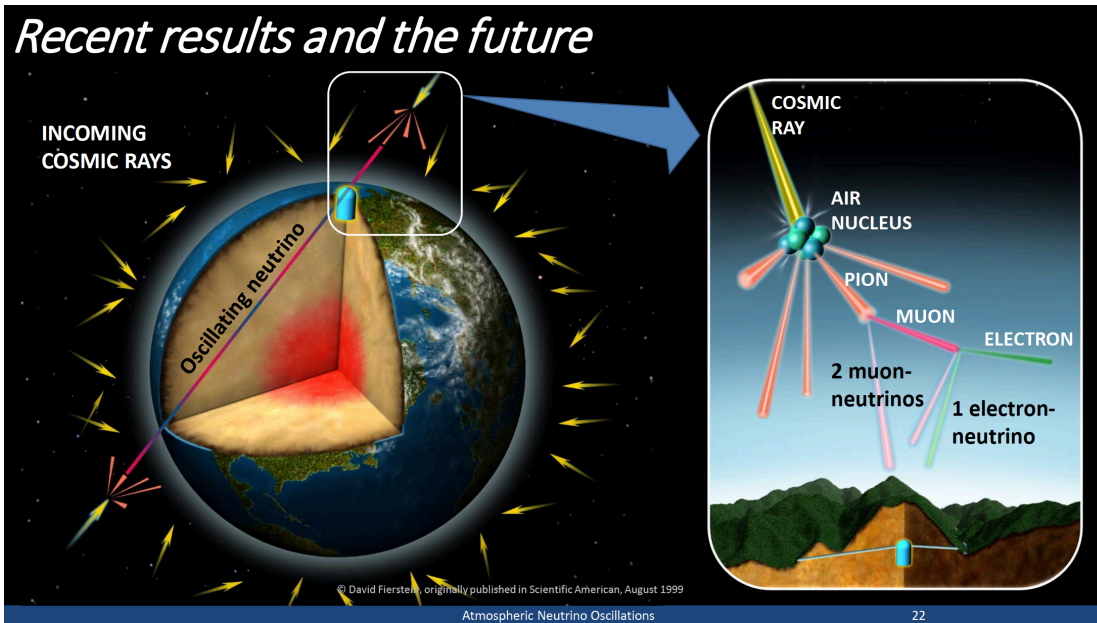
- まとめ

ニュートリノ

- 素粒子の一つ、中性レプトン(フェルミ粒子)
- 3つのフレーバー(電子ニュートリノ ν_e 、ミューニュートリノ ν_μ 、タウニュートリノ ν_τ)
- ベータ崩壊、大気中、太陽などで作られる

- ほとんど相互作用しない

- 標準模型では質量はゼロ → ニュートリノ振動の発見により質量があることが明らかに
(2015ノーベル賞: 梶田隆章、Arthur McDonald)
- ニュートリノ振動: ニュートリノが生成された場所から離れた場所で測定すると
ニュートリノのフレーバーの割合が変化



ニュートリノ振動

ニュートリノに3つの質量固有状態が存在すると仮定(質量: m_1, m_2, m_3)
フレーバー固有状態は質量固有状態の重ね合わせでかける

$$|\nu_\mu\rangle = U_{\mu 1}^* |\nu_1\rangle + U_{\mu 2}^* |\nu_2\rangle + U_{\mu 3}^* |\nu_3\rangle$$

質量固有状態の時間発展 $|\nu_i(t)\rangle = e^{-i(E_i t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} |\nu_i(t=0)\rangle (i = 1, 2, 3)$

質量固有状態のエネルギー $E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \approx E + \frac{m_i^2}{2E}$

距離L進むと位相が質量に応じて変わる $|\nu_i(L)\rangle = e^{-im_i^2 L/2E} |\nu_i(0)\rangle$

フレーバーが変わる確率は二乗質量差に依存

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = |\langle \nu_\beta(L) | \nu_\alpha(0) \rangle|^2 = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i>j} \left[C_{ij} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) + C'_{ij} \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) \right]$$
$$\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$$

測定値: (2014 Particle Data Groupより)

太陽ニュートリノ振動: $\Delta m_{21}^2: 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$

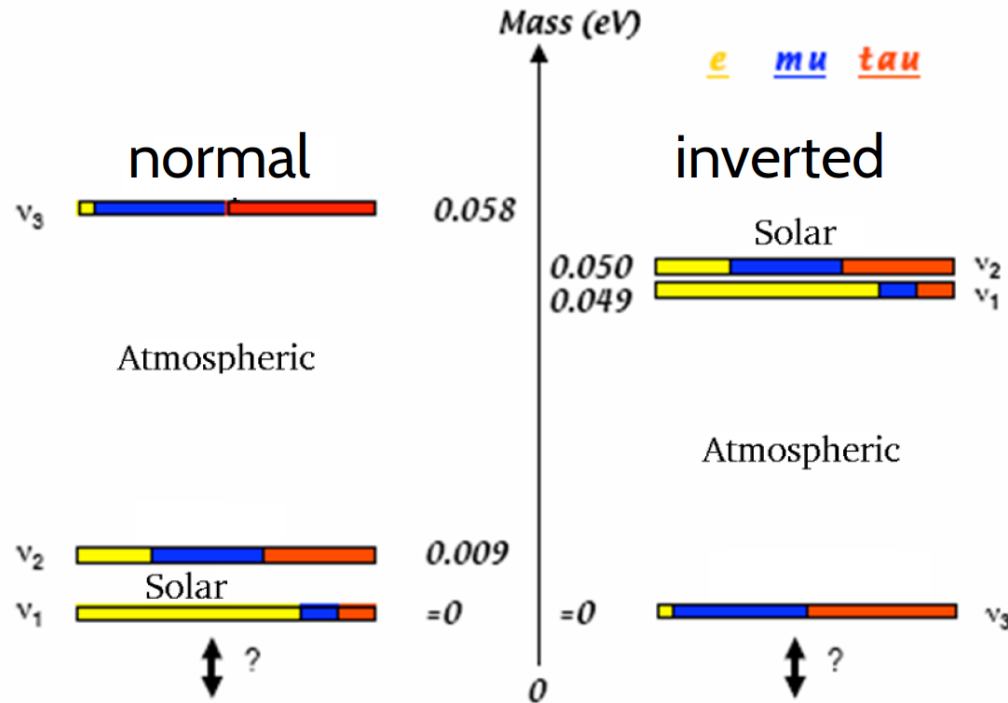
大気ニュートリノ振動: $|\Delta m_{32}^2|: 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$, 符号は不明

Δm_{32}^2 のほうが二桁大きい

ニュートリノの階層構造性

太陽ニュートリノ振動: $\Delta m_{21}^2: 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$

大気ニュートリノ振動: $|\Delta m_{32}^2|: 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ 、符号は不明



3つのニュートリノの質量固有状態は

重いニュートリノ1つと軽いニュートリノ2つ(正常階層)か

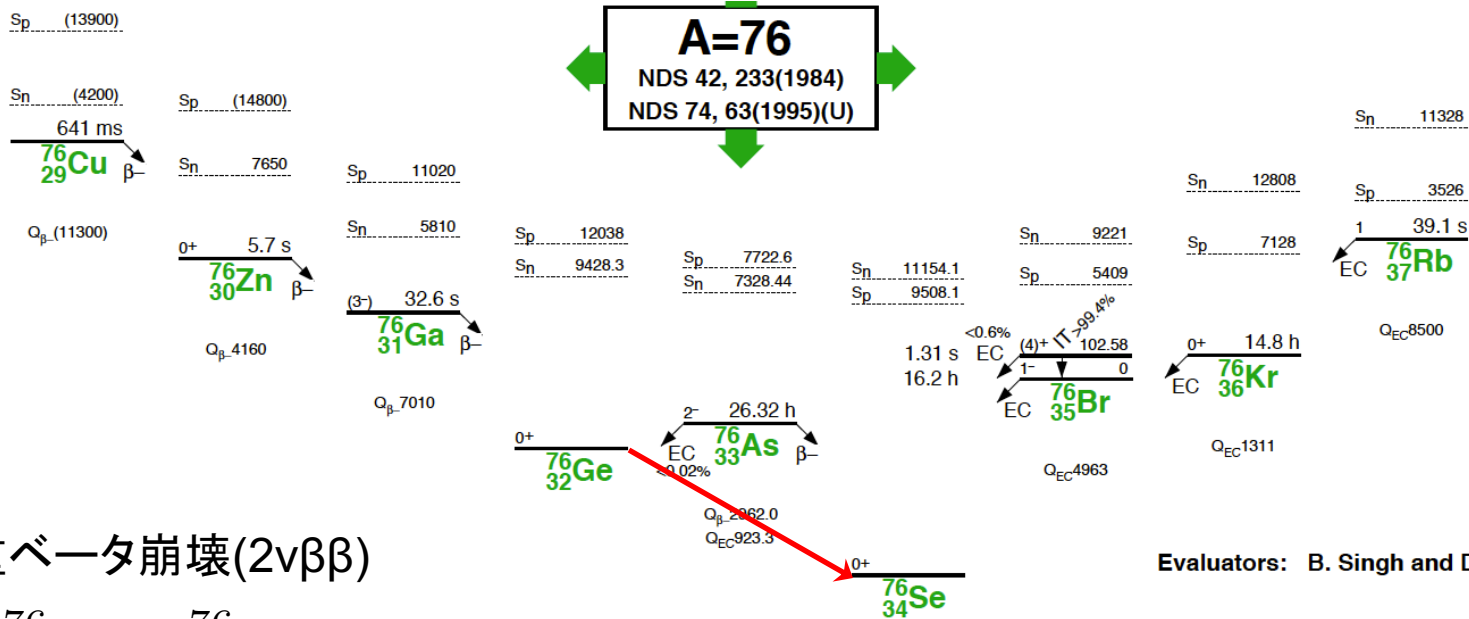
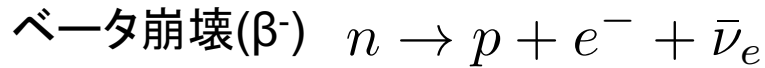
重いニュートリノ2つと軽いニュートリノ1つ(逆階層)かのどちらか

ニュートリノ振動実験では決定することができない

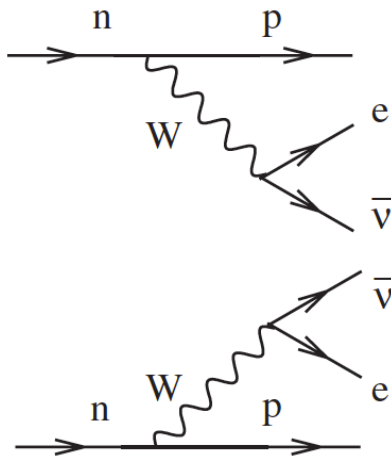
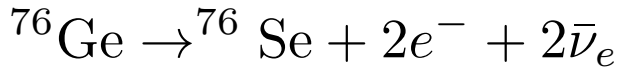
二重ベータ崩壊なら決定できるかも？

二重ベータ崩壊とは

Review: Avignone, et al., Rev. Mod. Phys. **80**, 481 (2008)



二重ベータ崩壊($2\nu\beta\beta$)



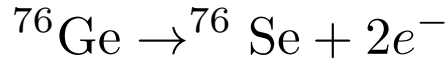
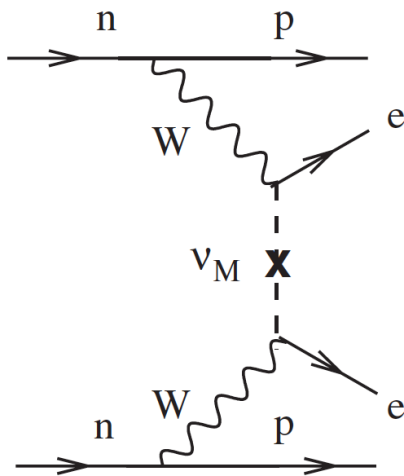
Evaluators: B. Singh and D.A. Viggars

TABLE II. A list of the values of $T_{1/2}^{2\nu}$ for various isotopes. These values are recommended by Barabash (2006a) as the best interpretation of the experimental data. One should heed the discussion in Barabash (2006a) before using the values in a quantitative way.

Isotope	$T_{1/2}^{2\nu}$ (yr)	Isotope	$T_{1/2}^{2\nu}$ (yr)
${}^{48}\text{Ca}$	$(4.2^{+2.1}_{-1.0}) \times 10^{19}$	${}^{128}\text{Te}$	$(2.5 \pm 0.3) \times 10^{24}$
${}^{76}\text{Ge}$	$(1.5 \pm 0.1) \times 10^{21}$	${}^{130}\text{Ba}$	EC-EC(2ν) $(2.2 \pm 0.5) \times 10^{21}$
${}^{82}\text{Se}$	$(0.92 \pm 0.07) \times 10^{20}$	${}^{130}\text{Te}$	$(0.9 \pm 0.1) \times 10^{21}$
${}^{96}\text{Zr}$	$(2.0 \pm 0.3) \times 10^{19}$	${}^{150}\text{Nd}$	$(7.8 \pm 0.7) \times 10^{18}$
${}^{100}\text{Mo}$	$(7.1 \pm 0.4) \times 10^{18}$	${}^{238}\text{U}$	$(2.0 \pm 0.6) \times 10^{21}$
${}^{116}\text{Cd}$	$(3.0 \pm 0.2) \times 10^{19}$		

二重ベータ崩壊とは

二重ベータ崩壊(ニュートリノレス, $0\nu\beta\beta$)



ニュートリノがマヨラナ粒子(粒子~反粒子)であれば可能

- CANDLES (${}^{48}\text{Ca}$, 大阪大学)
- MAJORANA(${}^{76}\text{Ge}$, アメリカ)
- KamLAND-Zen (${}^{136}\text{Xe}$, 東北大学)
- SuperNEMO (${}^{82}\text{Se}$, ${}^{100}\text{Mo}$, イタリア)
- SNO+ (${}^{130}\text{Te}$, カナダ)
- DCBA (${}^{100}\text{Mo}$, ${}^{150}\text{Nd}$, KEK)
- AXEL (${}^{136}\text{Xe}$, 京都大学)

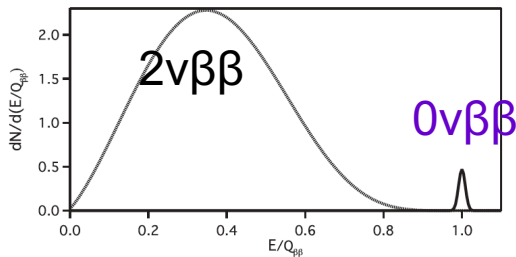
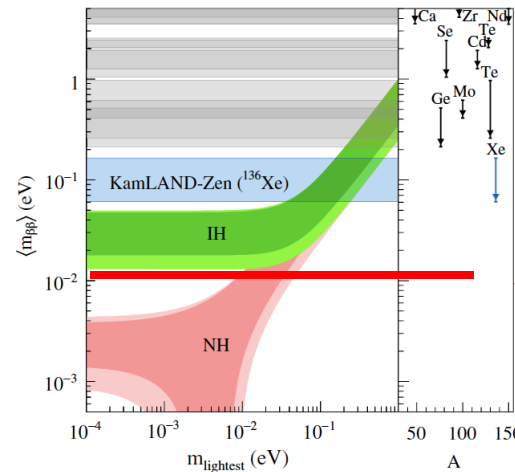


FIG. 5. The distribution of the sum of electron energies for $\beta\beta(2\nu)$ (dotted curve) and $\beta\beta(0\nu)$ (solid curve). The curves were drawn assuming that $\Gamma_{0\nu}$ is 1% of $\Gamma_{2\nu}$, and for a 1- σ energy resolution of 2%.

$$\langle m_{\beta\beta} \rangle = \sum_{i=1}^3 m_i U_{ei}^2$$

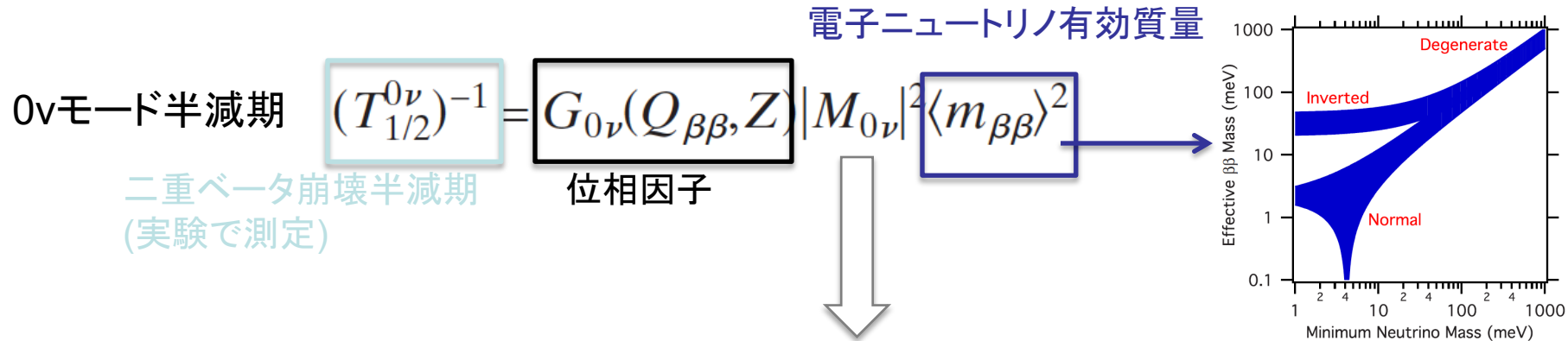


次世代実験計画

$0\nu\beta\beta$ 崩壊半減期からわかること

- ニュートリノがマヨラナ粒子かどうか
- ニュートリノの質量階層性

原子核行列要素



ニュートリノの質量決定のためには原子核行列要素の正確な評価が不可欠

$$2\pi\delta(E_f + E_{e1} + E_{e2} - E) \sum_n \left[\frac{\langle f | J_L^\mu(\vec{x}) | n \rangle \langle n | J_L^\nu(\vec{y}) | i \rangle}{q^0(E_n + q^0 + E_{e2} - E_i)} + \frac{\langle f | J_L^\nu(\vec{x}) | n \rangle \langle n | J_L^\mu(\vec{y}) | i \rangle}{q^0(E_n + q^0 + E_{e1} - E_i)} \right]$$

i: initial f: final states, E_{e1}, E_{e2} : electron energy
 J: charge changing hadronic current
 q^0 : neutrino energy, E_n : intermediate state energy

Closure approximation $q^0 \sim 100 \text{ MeV}$ と大きいので E_n を平均値 \bar{E} で置き換え

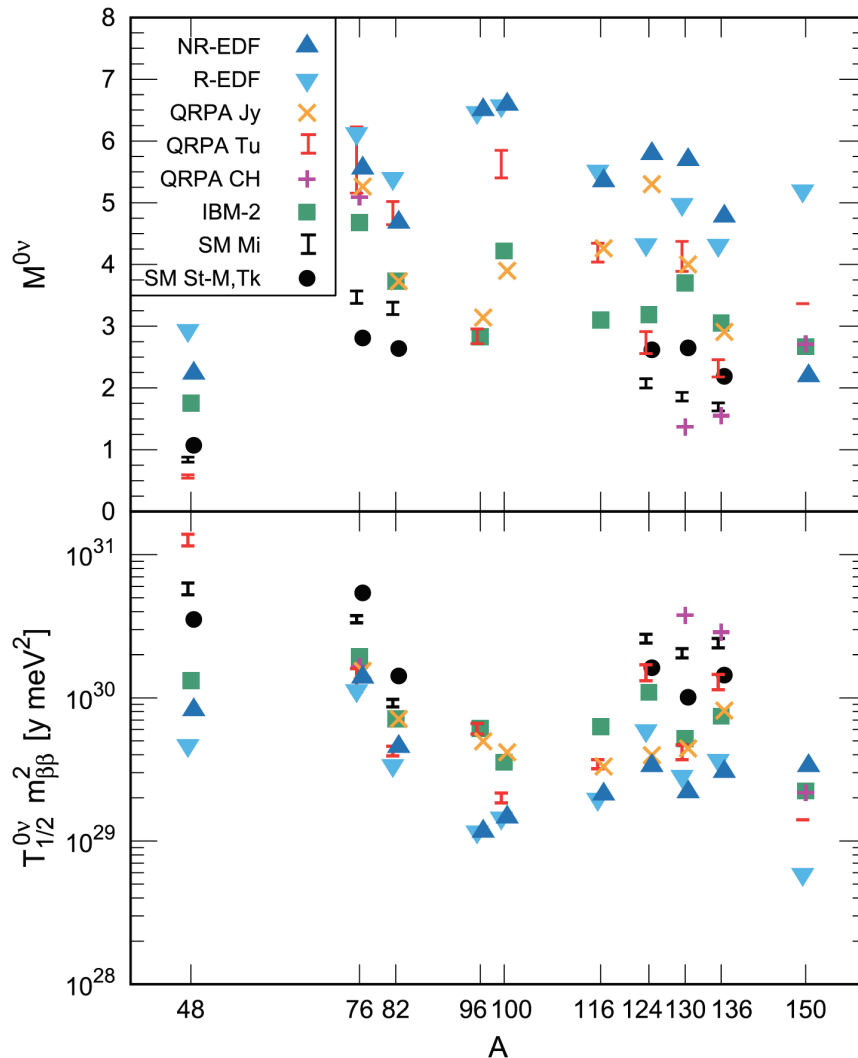
$$2\pi\delta(E_f + E_{e1} + E_{e2} - E_i) \left(\frac{\langle f | J_L^\mu(\vec{x}) J_L^\nu(\vec{y}) | i \rangle}{q^0(\bar{E} + q^0 + E_{e2} - E_i)} + \frac{\langle f | J_L^\nu(\vec{x}) J_L^\mu(\vec{y}) | i \rangle}{q^0(\bar{E} + q^0 + E_{e1} - E_i)} \right)$$

- ❑ closure approximationでは2体の行列要素を直接評価(中間状態を計算しなくてよい)
- ❑ closure approximation: $\sim 15\%$
- ❑ $2\nu\beta\beta$ のときはclosure approximationはよい近似ではない(neutrino propagatorがない)

原子核行列要素

Engel and Menendez, Rep. Prog. Phys. **80**, 046301 (2017)

$$(T_{1/2}^{0\nu})^{-1} = G_{0\nu}(Q_{\beta\beta}, Z) |M_{0\nu}|^2 \langle m_{\beta\beta} \rangle^2$$



REDF: 相対論的密度汎関数(GCM)
 NREDF: 非相対論的密度汎関数(GCM)
 QRPA: 準粒子乱雑位相近似
 IBM2: 相互作用するボソン模型
 SM: 殻模型

理論によって値がバラバラ(2~3倍のずれ)

原子核行列要素

ハドロン流 $\langle p | J_L^\mu(x) | p' \rangle = e^{iqx} \bar{u}(p) \left(g_V(q^2) \gamma^\mu - g_A(q^2) \gamma_5 \gamma^\mu - ig_M(q^2) \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m_p} q_\nu + g_P(q^2) \gamma_5 q^\mu \right) u(p')$

ベクトルカレント保存より $g_M(q^2) = g_M g_V(q^2) \quad g_M(0) \sim 3.70 g_V(0) \quad g_P(q^2) = 2m_p \frac{g_A(q^2)}{q^2 + m_\pi^2}$

$$g_V = g_V(0) = 1 \quad g_V(q^2) = \frac{g_V}{(1 + q^2/\Lambda_V^2)^2} \quad \Lambda_V^2 = 0.71(\text{GeV})^2$$

$$g_A = g_A(0) = 1.26 \quad g_A(q^2) = \frac{g_A}{(1 + q^2/\Lambda_A^2)^2} \quad \Lambda_A^2 = 1.09(\text{GeV})^2$$

非相対論近似

$$M_{0\nu} = \langle f | \frac{2R}{\pi g_A^2} \int_0^\infty q dq \sum_{ab} \frac{j_0(qr_{ab}) [h_F(q) + h_{GT}(q) \sigma_a \cdot \sigma_b] + j_2(qr_{ab}) h_T(q) \hat{S}_{ab}}{q + \bar{E} - (E_i + E_f)/2} \hat{\tau}_a^- \hat{\tau}_b^- | i \rangle$$

$$\hat{S}_{ab} = 3(\sigma_a \cdot \hat{r}_{ab})(\sigma_b \cdot \hat{r}_{ab}) - \sigma_a \cdot \sigma_b$$

$$R = 1.2A^{1/3} \text{fm}$$

フェルミ項

$$h_F(q) = -g_V^2(q^2)$$

ガモフ=テラー項

$$h_{GT}(q) = g_A^2(q^2) - \frac{g_A(q^2)g_P(q^2)q^2}{3m_p} + \frac{g_P^2(q^2)q^4}{12m_p^2} + \frac{g_M^2(q^2)q^2}{6m_p^2}$$

テンソル項

$$h_T(q) = \frac{g_A(q^2)g_P(q^2)q^2}{3m_p} - \frac{g_P^2(q^2)q^4}{12m_p^2} + \frac{g_M^2(q^2)q^2}{12m_p^2}$$

□ g_M は小さいとして無視

□ g_P からの寄与は原子核行列要素に30%程度だがよく無視される

原子核行列要素

$$M_{0\nu} \approx M_{0\nu}^{\text{GT}} - \frac{g_V^2}{g_A^2} M_{0\nu}^{\text{F}}$$

$$g_V = g_V(0) = 1$$
$$g_A = g_A(0) = 1.26$$

フェルミ
(スピン演算子を含まない)

$$M_{0\nu}^{\text{F}} = \langle f | \sum_{a,b} H(r_{ab}, \bar{E}) \tau_a^+ \tau_b^+ | i \rangle$$

ガモフ=テラー(スピン1)

$$M_{0\nu}^{\text{GT}} = \langle f | \sum_{a,b} H(r_{ab}, \bar{E}) \vec{\sigma}_a \cdot \vec{\sigma}_b \tau_a^+ \tau_b^+ | i \rangle$$

H: ニュートリノポテンシャル

$$H(r, \bar{E}) \approx \frac{2R}{\pi r} \int_0^\infty dq \frac{\sin qr}{q + \bar{E} - (E_i + E_f)/2}$$

精度良く原子核行列要素の値を求めるには

- 崩壊の始状態 $|i\rangle$ と終状態 $|f\rangle$ を精度良く計算
- 遷移演算子の正確な計算

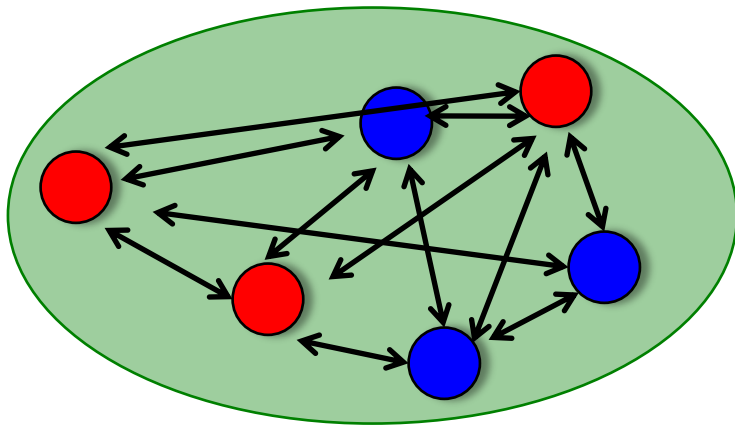
原子核構造

原子核：N個の中性子とZ個の陽子からなる粒子数 $A(=N+Z)$ 個の多フェルミ粒子系

フェルミ粒子：粒子の入れ替えに対して反対称

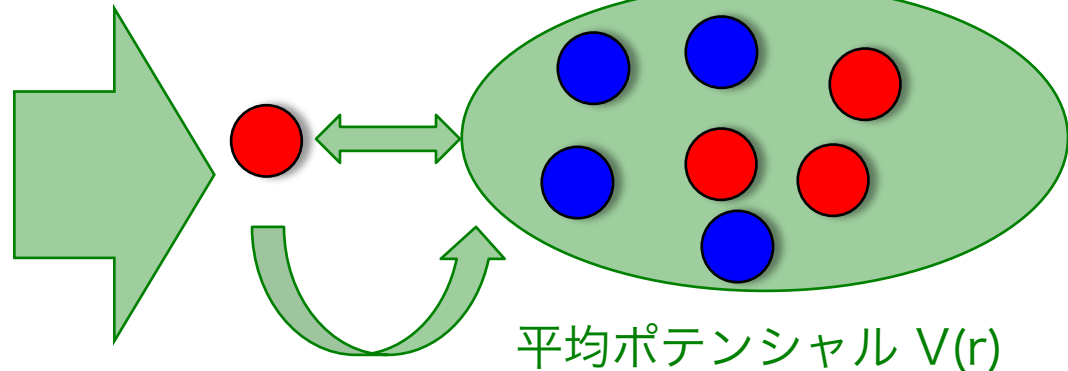
$$\Psi(1, \dots, i, \dots, j, \dots, A) = -\Psi(1, \dots, j, \dots, i, \dots, A)$$

複雑に核子間で相互作用



一体場で近似

核子の軌道: $\psi(r)$ は他の核子の作るポテンシャル場で決定



Slater行列式(2核子系の場合) $\Psi(1, 2) = \psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_1(2)\psi_2(1)$

A核子系の場合も同様に行列式表示で反対称化が実現できる

核子の軌道はSchrödinger方程式を解いて決定

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

球対称平均ポテンシャル

平均ポテンシャルから核子の軌道についてどのようなことがわかるか

原子核内の核子の従うSchrödinger方程式

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

ポテンシャルが球対称な場合：変数分離 $\psi(\mathbf{r}) = R_l(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]$$

角度部分：球面調和関数(l :軌道角運動量量子数、 m :磁気量子数)

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

動径部分

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] R_l(r) = ER_l(r)$$

3次元調和振動子

平均ポテンシャルの例：3次元調和振動子 $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$

動径部分
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] R_l(r) = ER_l(r)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} r$$

$$R_l(r) = C \rho^l F\left(-n, l + \frac{3}{2}; \rho^2\right) e^{-\rho^2/2}$$

合流型超幾何関数

$$n = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{\hbar\omega_0} - l - \frac{3}{2} \right) \longleftrightarrow E = \hbar\omega_0 \left(2n + l + \frac{3}{2} \right)$$

$N = 2n + l$:主量子数(principal quantum number)
 n :動径量子数(radial quantum number)

第一種合流型超幾何関数(Kummer関数)

$$F(a, c; z) \equiv 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$F\left(-n, l + \frac{3}{2}; \rho^2\right) = \frac{n!(l + \frac{1}{2})!}{(n + l + \frac{1}{2})!} L_n^{l+1/2}(\rho^2) \quad \text{Laguerre陪多項式}$$

調和振動子ポテンシャルの波動関数は遠方で $\exp(-r^2)$ で小さくなる
この振る舞いは原子核の場合非現実的(問題にならない場合もある)

3次元調和振動子

核子軌道のエネルギー

$$E = \hbar\omega_0 \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right)$$

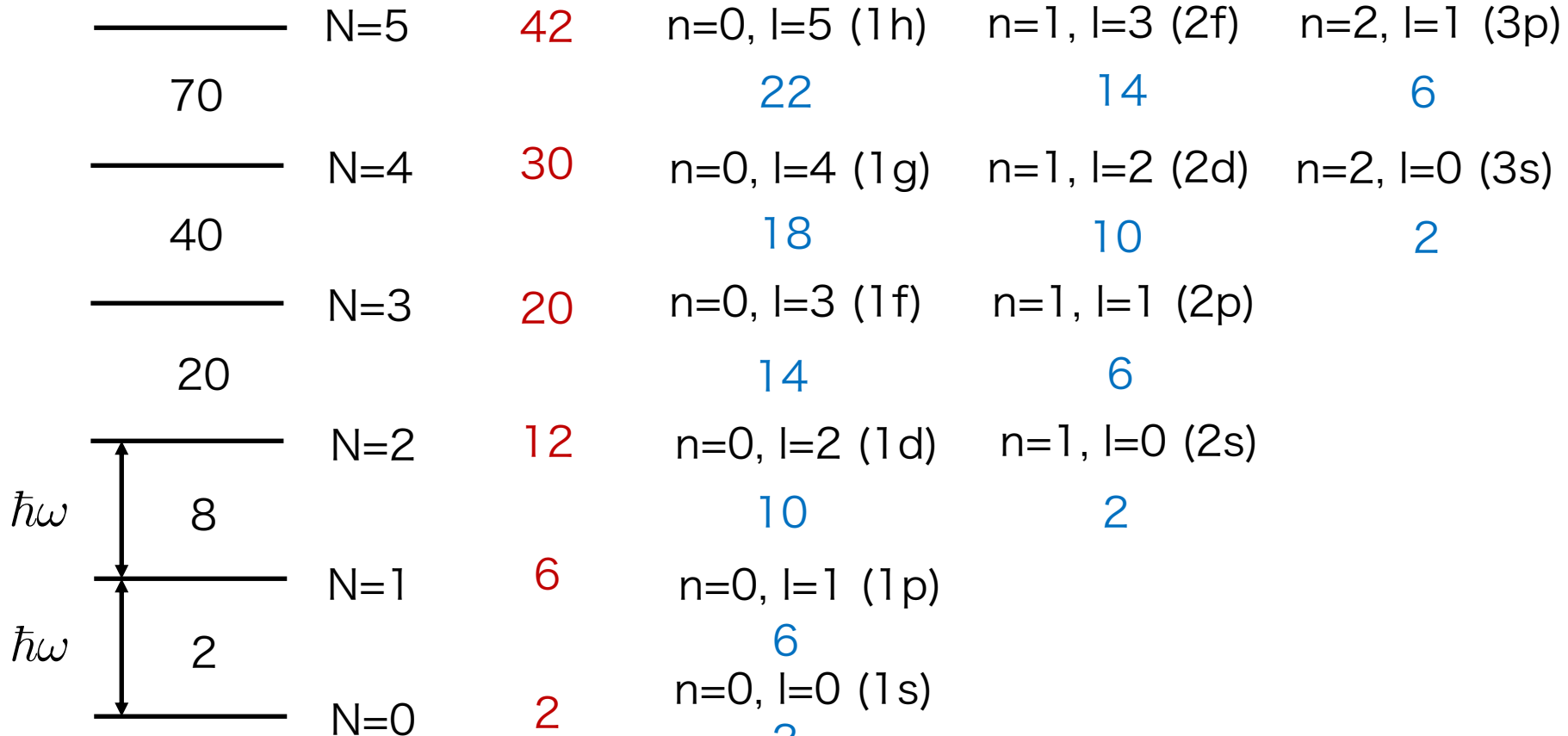
$N = 2n + l$: 主量子数(principal quantum number)

n : 動径量子数(radial quantum number)

l : 軌道量子数(orbital quantum number)

縮退度: $(N+1)(N+2)$

lごとの縮退度: $2(2l + 1)$



- エネルギーは主量子数だけで決まる
- シェル構造(液滴模型ではでない量子力学系の性質)
- 縮退度の2はスピン自由度から
- 魔法数: 2, 8, 20, 40, 70, ... (閉殻構造をとる数)

調和振動子ポテンシャルでの問題

・ 3次元調和振動子での問題 1 : l の大きな軌道のエネルギーが高すぎる

修正 1 : 調和振動子に l^2 に比例するポテンシャルを追加

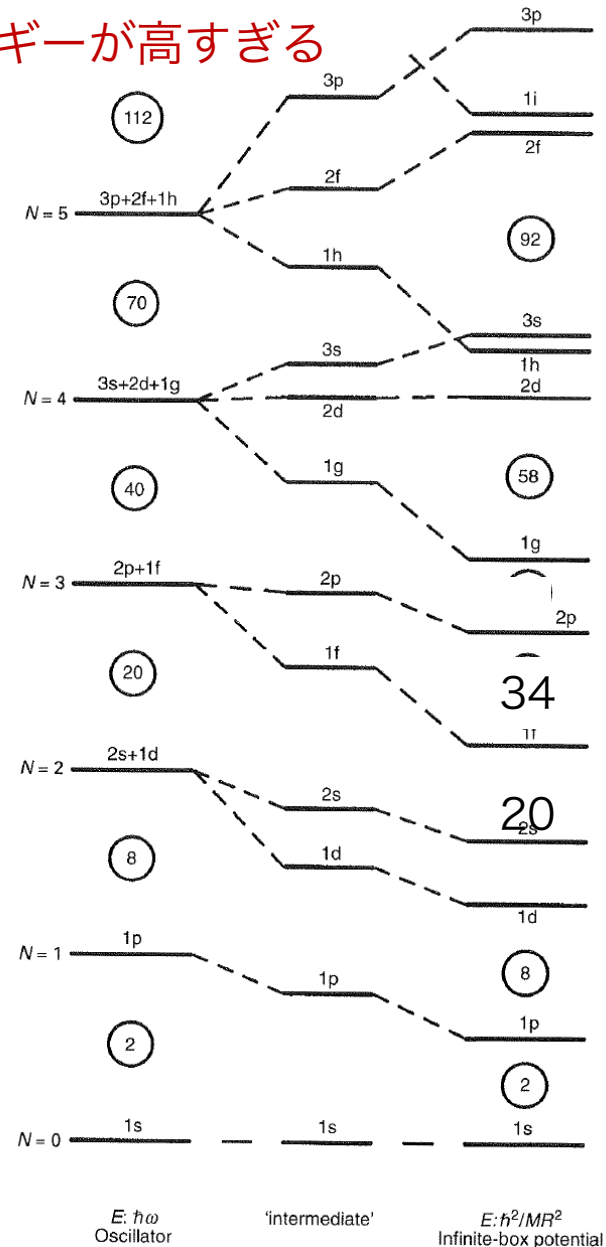
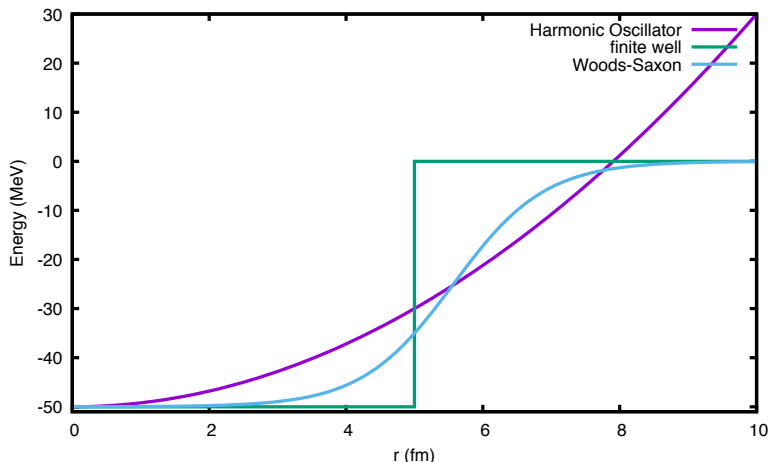
$$-\kappa \hbar \omega_0 \mu (l^2 - \langle l^2 \rangle_N)$$

修正 2 : 井戸型ポテンシャル

l の大きな軌道は遠心力により
原点から離れたところに存在

修正 3 : 現実的なポテンシャル
(Woods-Saxonポテンシャル)

$$V_{WS}(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r - R)/a]}$$



スピン-軌道力 (LS力)

- 3次元調和振動子での問題2：現実の魔法数が説明できない(28など)

$$V_{LS} = W(r)\hat{l} \cdot \hat{s}$$

スピン-軌道力 l と s が平行なら引力 ($W(r)<0$)
反平行なら斥力

$$\hat{l} \cdot \hat{s} = \frac{1}{2}(\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2)$$

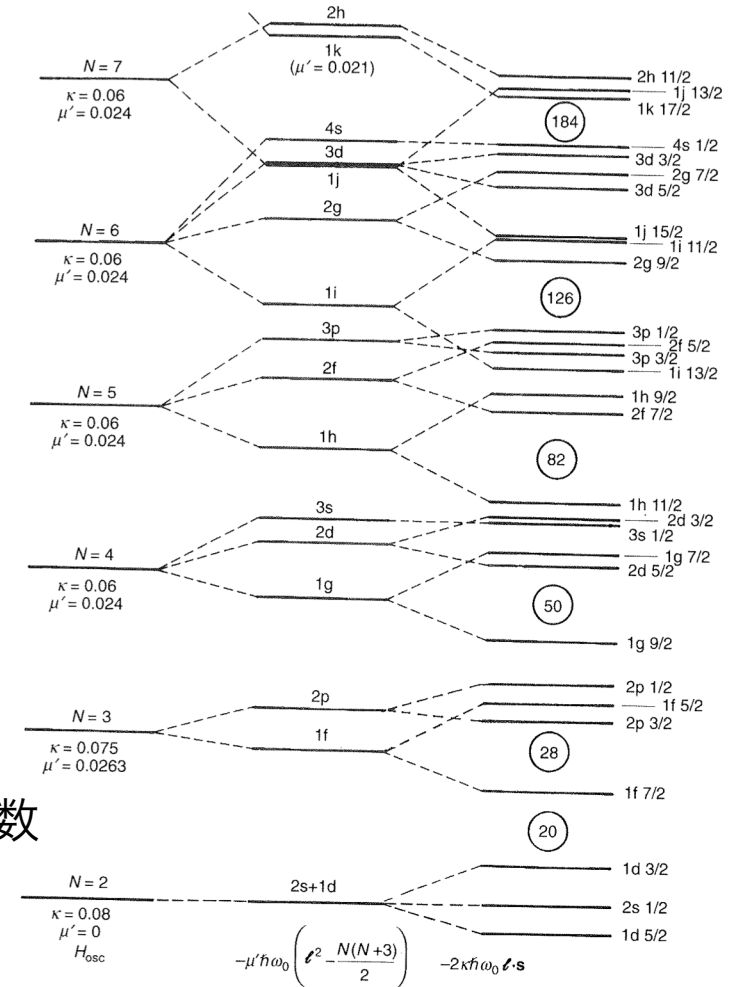
$\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$ 全角運動量(軌道とスピンの合成)

$$\langle \hat{l} \cdot \hat{s} \rangle = \frac{1}{2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] = \begin{cases} \frac{l}{2} & j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{l+1}{2} & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

スピン-軌道力がないと l, l_z, s, s_z が核子軌道の量子数

スピン-軌道力があると j, j_z, l, s が核子軌道の量子数

スピン-軌道力は波動関数の形を変えない



Nilsson and Ragnarssonより

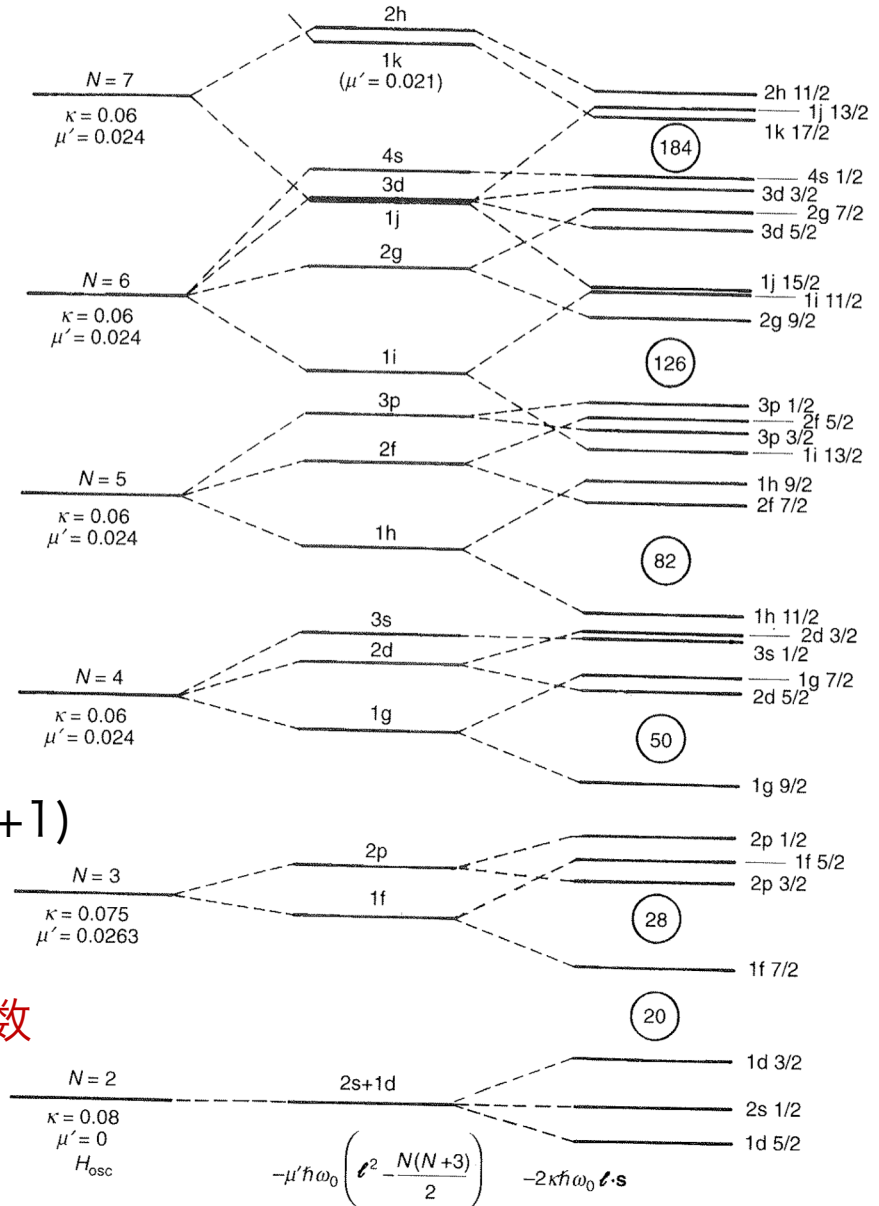
魔法数を説明 (Mayer and Jensen 1963年ノーベル物理学賞)

二重ベータ崩壊核の殻構造

^{48}Ca (N=28, Z=20) : 二重魔法核

^{48}Ti (N=26, Z=22)

neutron		proton	
28	f7/2	28	f7/2
20	d3/2	20	d3/2
	s1/2	20	s1/2
8	d5/2	8	d5/2
	p1/2	8	p1/2
	p3/2	8	p3/2
2	s1/2	2	s1/2



(軌道の縮退度は $2j+1$)

^{100}Mo (N=58, Z=42)

^{136}Xe (N=82, Z=54) : 中性子数が魔法数

^{150}Nd (N=90, Z=60)

開殻では何が起きるか？(変形)

Jahn-Teller効果：対称性が高い状態で軌道が部分縮退している状態は不安定
 →対称性が破れて安定化

球対称ポテンシャル

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$$



軸対称変形ポテンシャル

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m[\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2]$$

distortion parameter

$$\omega_z = \omega_0(\varepsilon) \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \quad \omega_{\perp} = \omega_0(\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon\right) \quad \varepsilon = \frac{\omega_{\perp} - \omega_z}{\omega_0}$$

球形付近での振る舞い($\varepsilon \ll 1$)

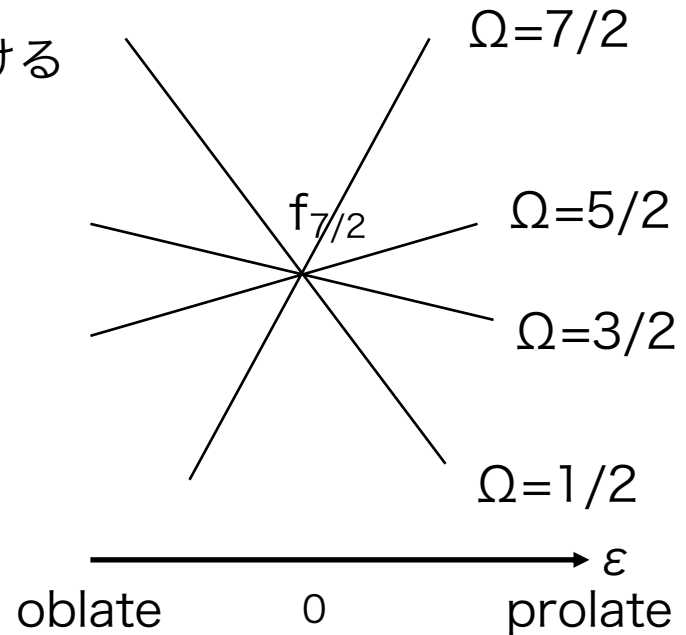
Hamiltonianに対して1次の摂動項 $\varepsilon M \omega_0^2 \frac{1}{3}(x^2 + y^2 - 2z^2) = -M \omega_0^2 \frac{2}{3} \varepsilon \sqrt{\frac{4\pi}{5}} r^2 Y_{20}(\theta, \varphi)$

j軌道は2j+1重に縮退→摂動項によって縮退が解ける

$$\langle Nl_j \Omega | -\varepsilon r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) | Nl_j \Omega \rangle \sim \varepsilon \langle r^2 \rangle \frac{3\Omega^2 - j(j+1)}{j(j+1)}$$

Ωの大きさにエネルギーが変わる
 ±Ωの順位は縮退

Ω：角運動量の第三成分(j_z)



開殻以外では回転対称性を破って平均ポテンシャルが変形することが多い

Nilsson図(変形一粒子エネルギー)

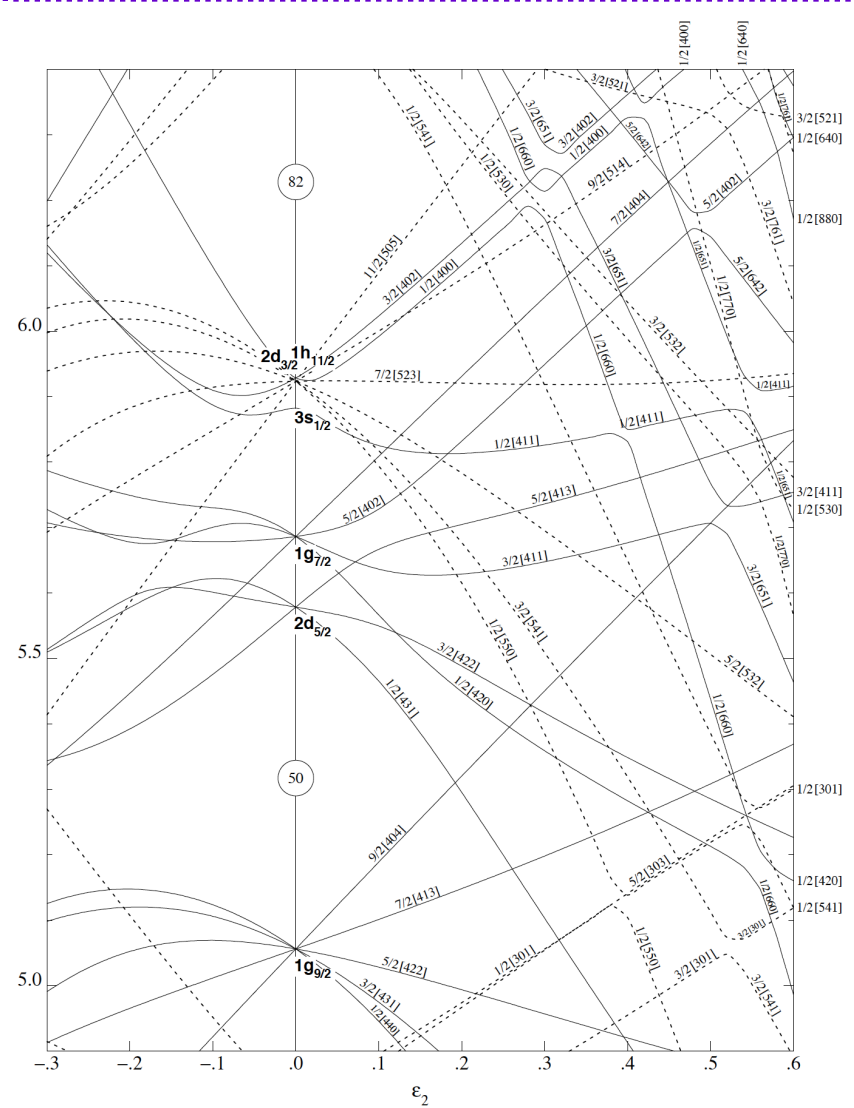
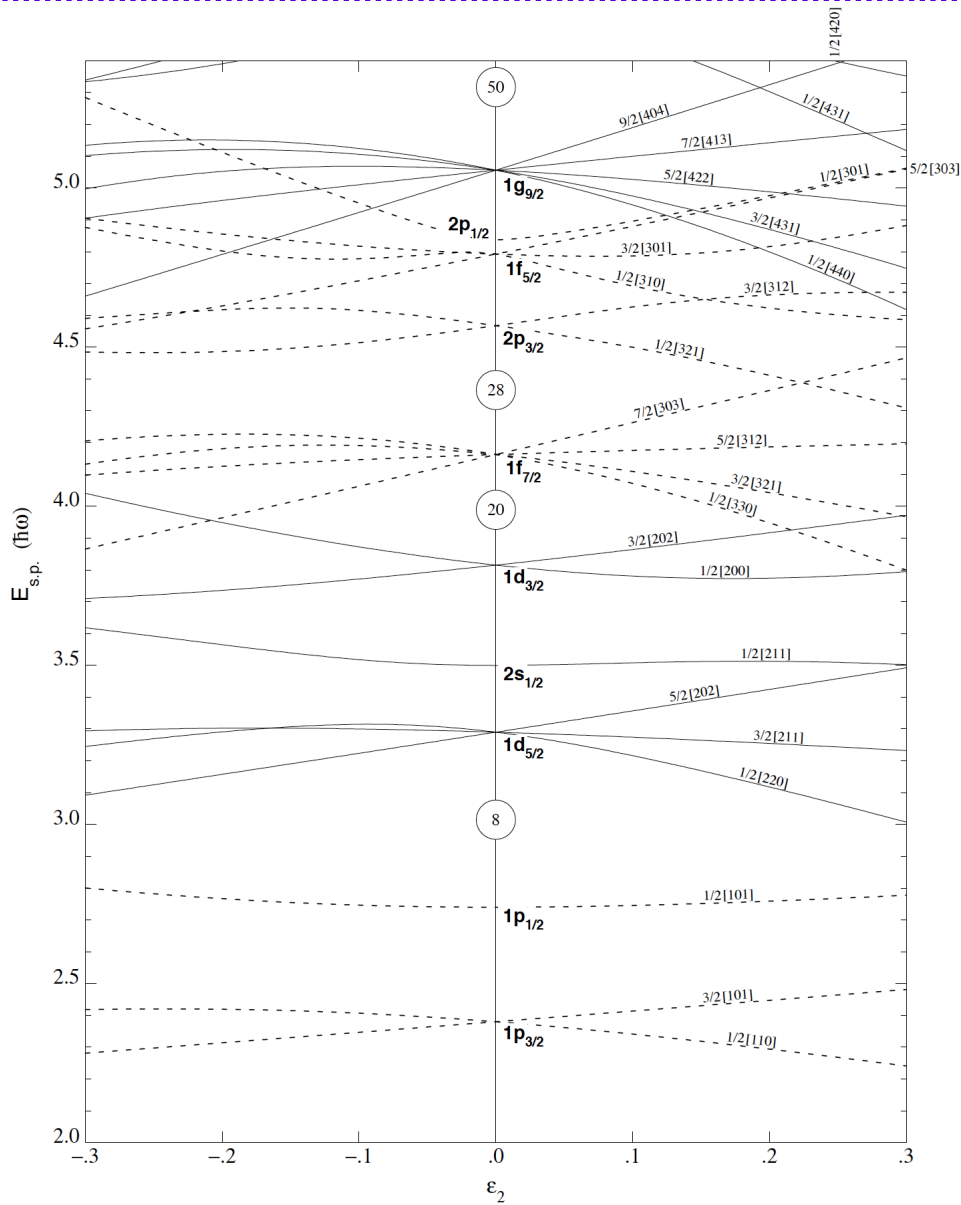
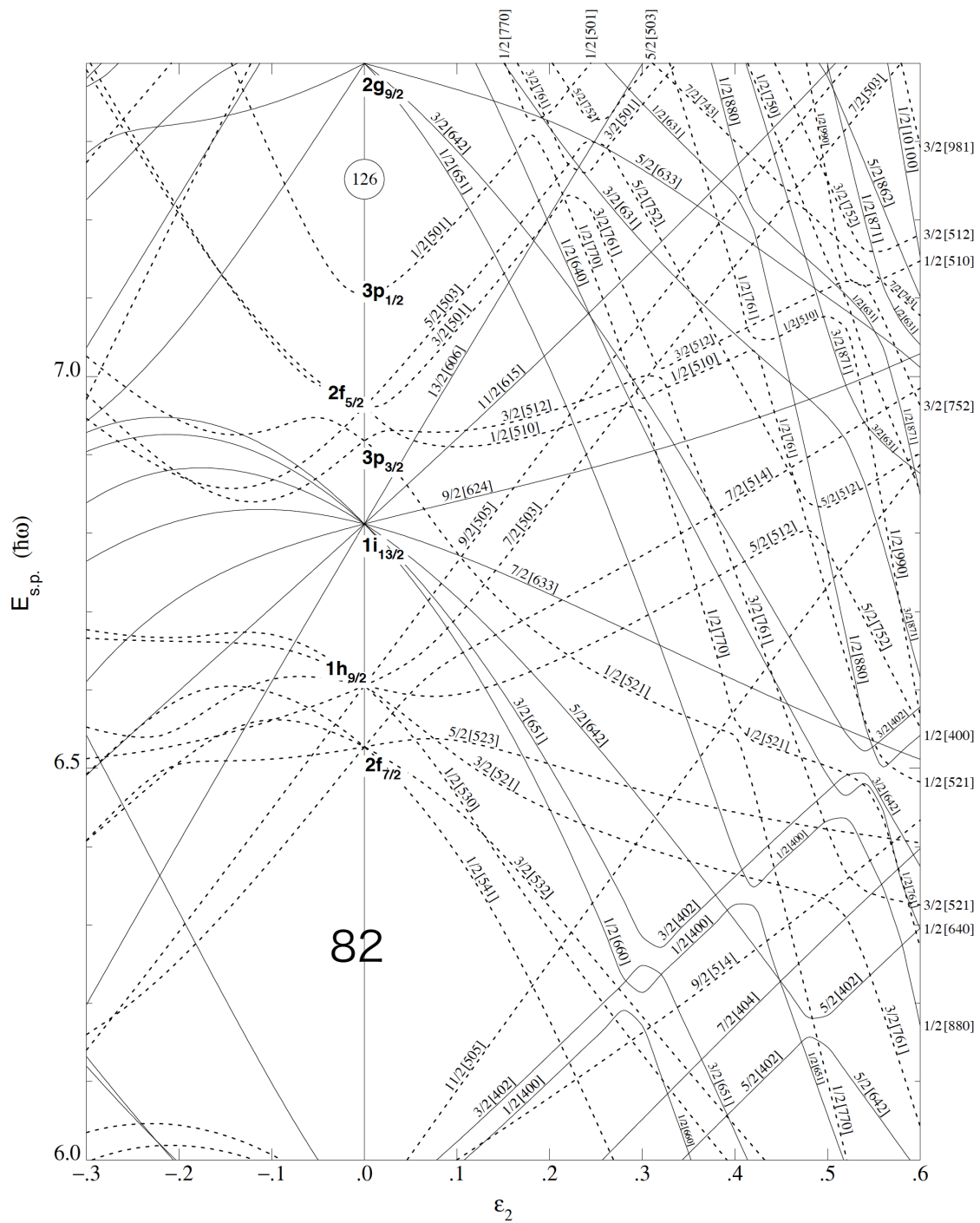


Table of Superdeformed bandより

量子数が同じ軌道は相互作用して交差しない



開殻では何が起きるか？(対凝縮)

対相関：時間反転対称な軌道に対で入った核子は引力相互作用を受ける
これまでの平均ポテンシャルには入らない相関(残留相互作用)

対相関の実験的証拠

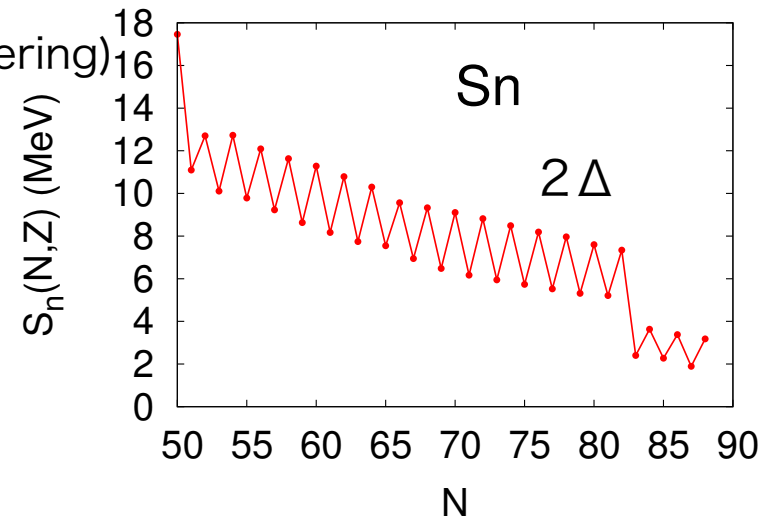
偶々核と奇核で束縛エネルギーに差(odd-even staggering)
(奇核では最後の粒子がペアを組めないため
近くの偶々核より対相関分だけエネルギーを損する)

1中性子の分離エネルギー

$$S_n(N, Z) = B(N, Z) - B(N - 1, Z)$$

B:束縛エネルギー $E(N, Z) = -B(N, Z)$

錫同位体の1中性子の分離エネルギー



対ギャップ(いろいろな定義)

$$\Delta_n(N, Z) = -\frac{1}{4}[S_n(N + 1, Z) - 2S_n(N, Z) + S_n(N - 1, Z)]$$

$$\Delta_n^{(3)}(N, Z) = \frac{(-1)^{N+1}}{2}[B(N - 1, Z) - 2B(N, Z) + B(N + 1, Z)]$$

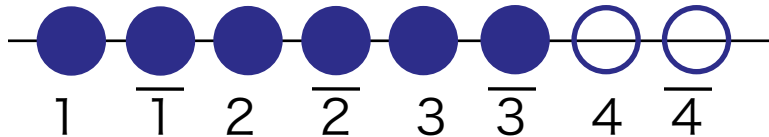
$$\Delta \approx 12/\sqrt{A} \text{ MeV}$$

対相関は平均ポテンシャルに対ポテンシャル入れる拡張で扱える

開殻では何が起きるか？(対凝縮)

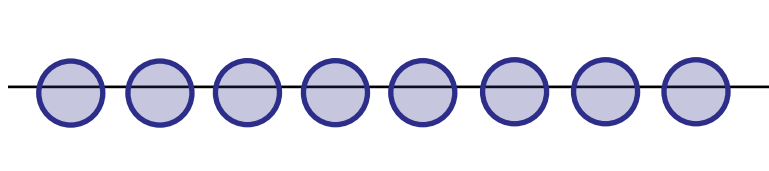
対相関：平均ポテンシャルによる記述をすると粒子数保存を破る

^{48}Ti のf7/2軌道：中性子が6つ 8つの軌道のうち6つに入る


 $f7/2 (2\Omega=8) \quad |\psi\rangle = \prod_{i=1}^3 \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{\bar{i}}^\dagger |0\rangle$

対凝縮：すべての軌道が部分占有(確率 v^2 で占有、確率 u^2 で非占有の重ね合わせ)

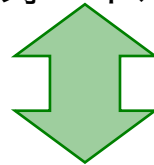
粒子数保存を破る：中性子数の平均値が6になるようにする


 $f7/2 (2\Omega=8) \quad |\psi\rangle = \prod_{i=1}^{\Omega} (u_i + v_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{\bar{i}}^\dagger) |0\rangle$

波動関数はBCS型

対ギャップ $\Delta = G \sum_i u_i v_i$
 対相関エネルギー $E_{\text{pair}} = \frac{\Delta^2}{G}$

対相関は軌道が半分空いているときに最大(開殻の真ん中で最大)
 高い軌道縮退度のほうが対相関エネルギーが大きい→球形を好む



変形と競合

原子核の構造は対相関と四重極(変形)相関とのバランスで決まる

二重ベータ崩壊核行列要素計算の核構造理論

平均ポテンシャル(例えば3次元調和振動子)

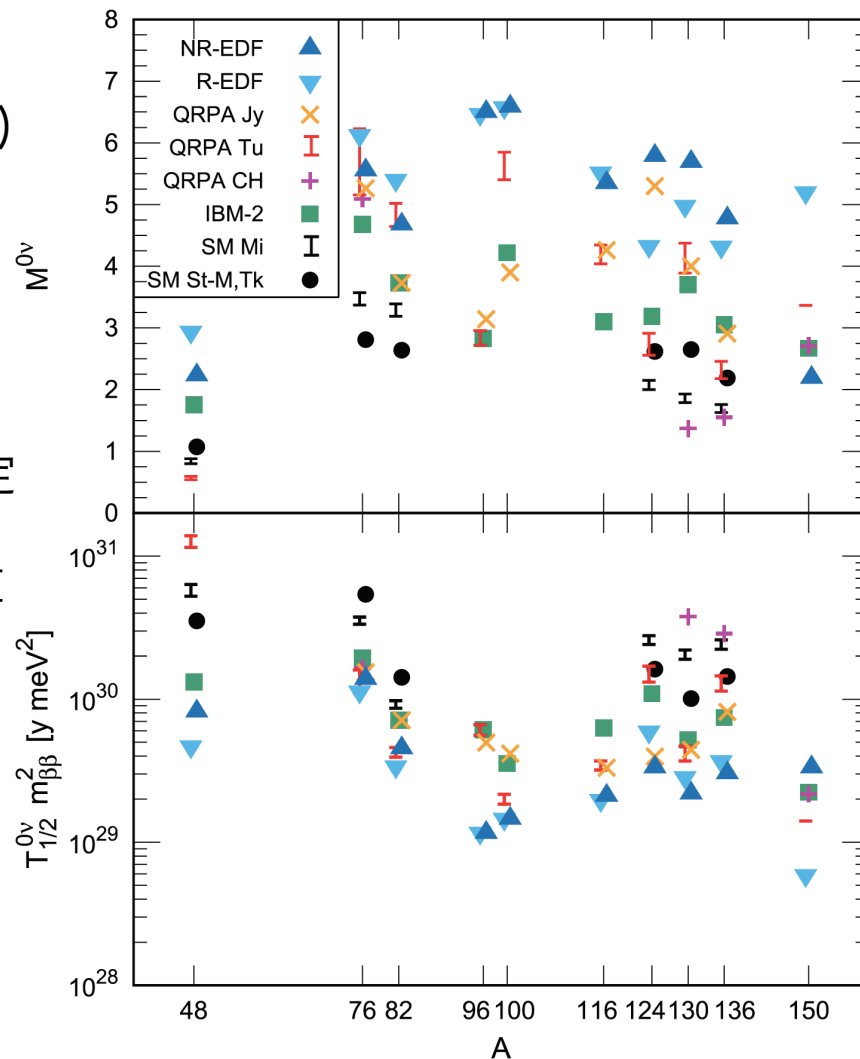
→ 核子の一粒子軌道(Slater行列式)が決まる

原子核の核子間の有効相互作用(Hamiltonian)

$$\hat{H} = \sum_{ij} t_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \bar{v}_{ijkl} c_i^\dagger c_j^\dagger c_l c_k$$

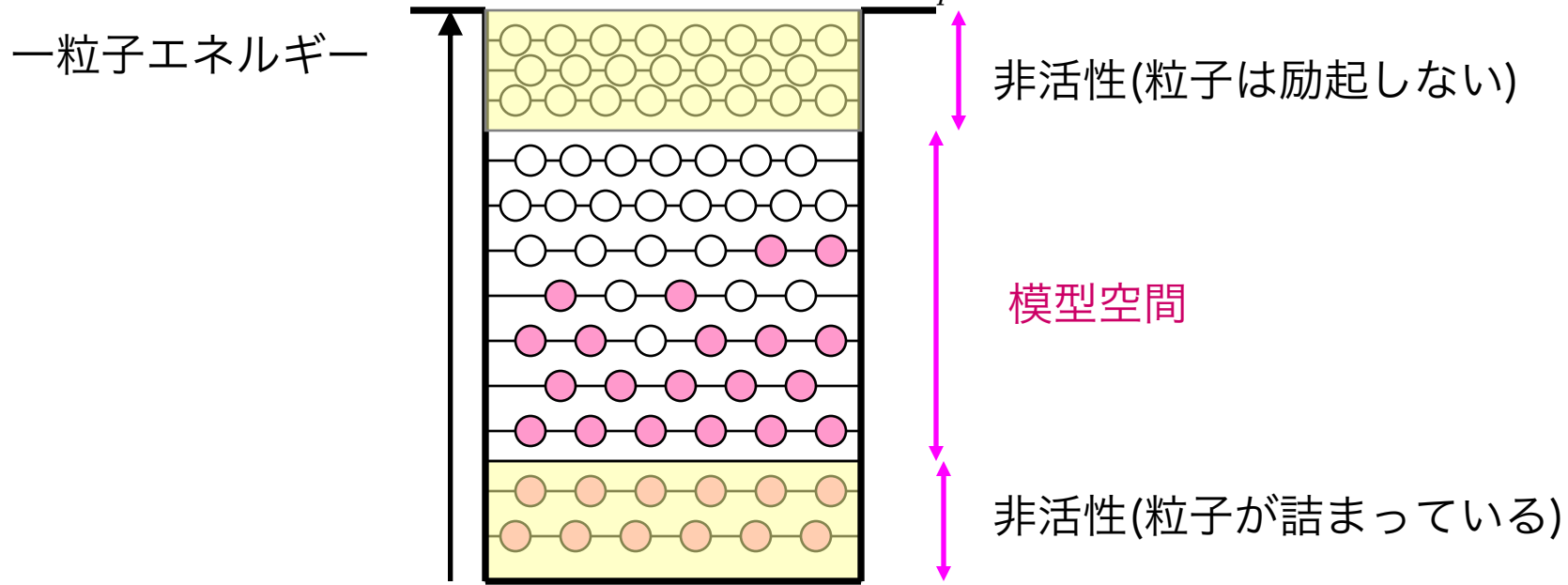
- 有効相互作用から平均ポテンシャルを決定
平均場理論(QRPA, EDF)
さらに相関を入れて原子核行列要素を計算

- ハミルトニアン of 厳密解を求める
(調和振動子基底を出発点として)
殻模型(shell model; SM)



原子核の厳密解(殻模型計算)

多体状態は一粒子状態の積(Slater行列式) $\prod_{n=1}^N \hat{c}_n^\dagger \prod_{p=1}^Z \hat{c}_p^\dagger |0\rangle$



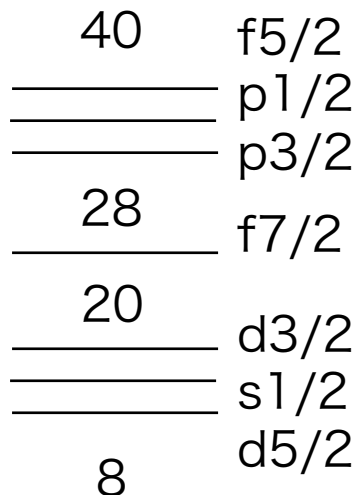
一粒子模型空間を設定(完全系を張る調和振動子基底など)
 基底間の有効相互作用の行列要素を計算・対角化
 有効相互作用は模型空間に依存するので実験データに合わせて決定する
 奇核・励起状態も計算可能。2νββも計算できる。

基底の数(例) : ^{136}Xe : 50個の一粒子状態の模型空間を陽子14個・中性子32個とする
 時間反転対称性で半分にしても基底の数は $({}_{25}\text{C}_7) \times ({}_{25}\text{C}_{16})$ 次元

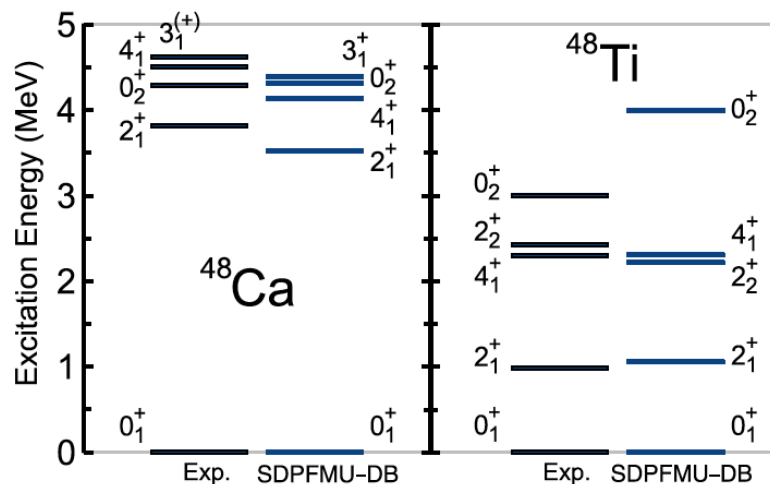
^{48}Ca の殻模型計算

Iwata et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 112502 (2016)

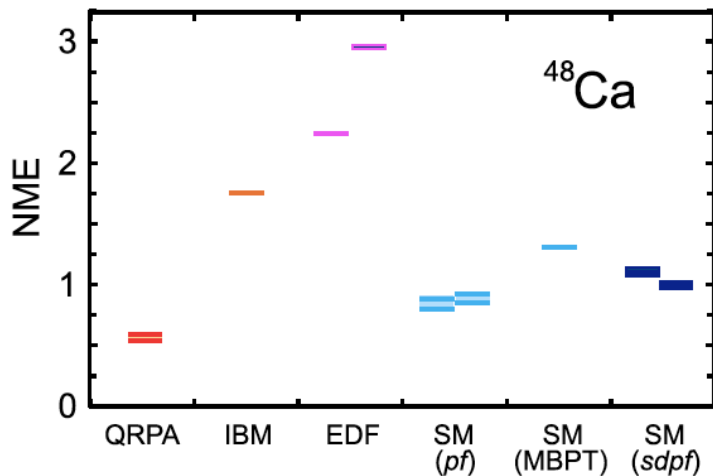
模型空間：sd+pf shell、次元は ^{48}Ti で 2×10^9



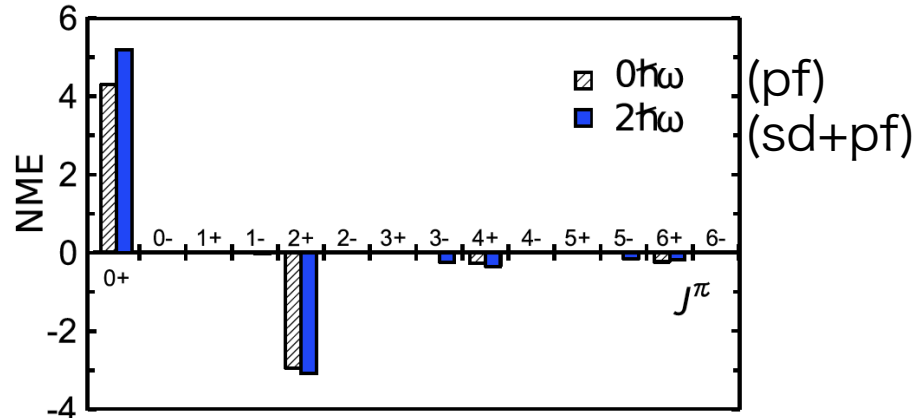
励起状態スペクトル



原子核行列要素



$$M^{0\nu} = \sum_J \langle 0_f^+ | \sum_{i \leq j, k \leq l} M_{ij,kl}^J [(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger)^J (\hat{a}_k \hat{a}_l)^J] | 0_i^+ \rangle$$



^{136}Xe の殻模型計算

Menendez et al., Nucl. Phys. A **818**, 139 (2009)

模型空間 : $(A > 124)$ g7/2, d3/2, d5/2, s1/2, h11/2

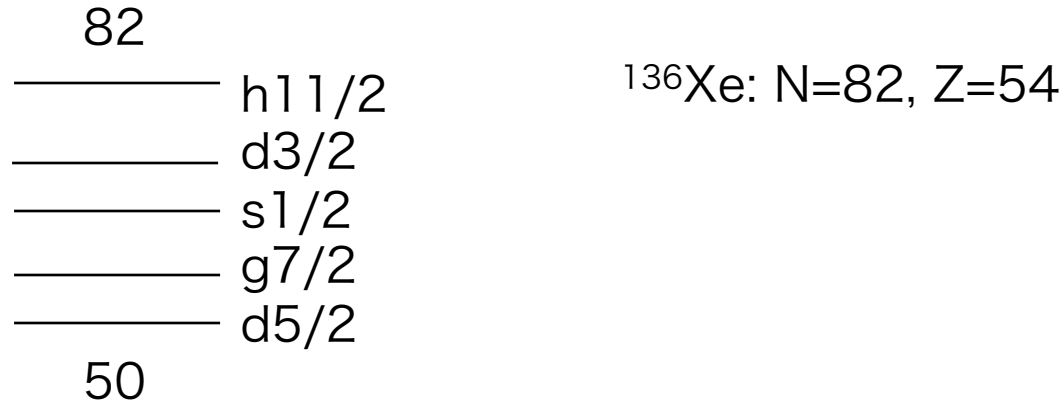


Table 9

NME's for the different decays to the different excited 0_1^+ states studied. The ground states are denoted by gs. Half-lives are calculated for $\langle m_\nu \rangle = 1$ eV. The minor differences between these NME's and those of Ref. [18] come as in Fig. 8.

	A = 48	A = 76	A = 82	A = 124	A = 130	A = 136
$M_{\text{gs} \rightarrow \text{gs}}^{0\nu\beta\beta}$	0.61	2.30	2.18	2.10	2.12	1.77
$M_{\text{gs} \rightarrow 0_1^+}^{0\nu\beta\beta}$	0.68	1.49	0.28	0.80	0.19	0.49
$\frac{G_{01}(\text{gs} \rightarrow \text{gs})}{G_{01}(\text{gs} \rightarrow 0_1^+)}$	85	12	11	40	38	22
$T_{1/2}^{\text{gs} \rightarrow \text{gs}}$ (10^{24} y)	10.8	7.70	1.94	2.13	1.29	1.78
$T_{1/2}^{\text{gs} \rightarrow 0_1^+}$ (10^{26} y)	7.35	2.28	12.9	5.82	61.2	5.00

spin-orbit partnerが全て入っていない

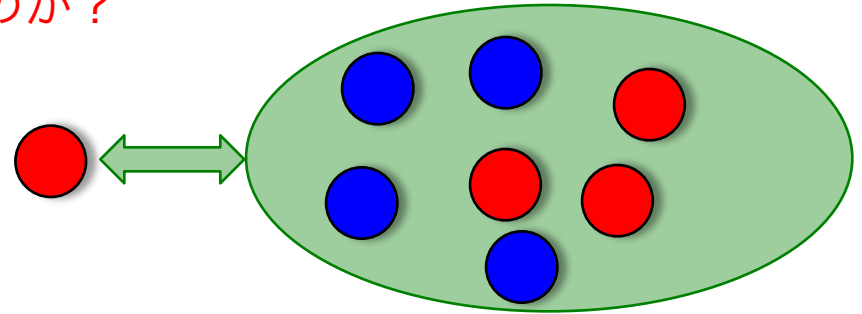
→スピンの向きを変えるGamow-Teller演算子($\sigma \sigma \tau \tau$)の表現が不十分

平均場理論

殻模型では重い変形原子核の記述は難しい(^{150}Nd) → 平均場理論に基づく記述

平均ポテンシャルはどのようにして決まるのか？

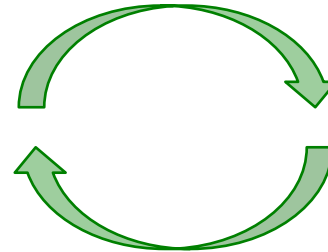
核子の配位(一粒子軌道)、密度で
平均ポテンシャルは決まる



平均ポテンシャル $V(r)$

自己無撞着性(self-consistency)

核子の配位(一粒子軌道)・密度



平均ポテンシャル

収束するまで計算を繰り返す

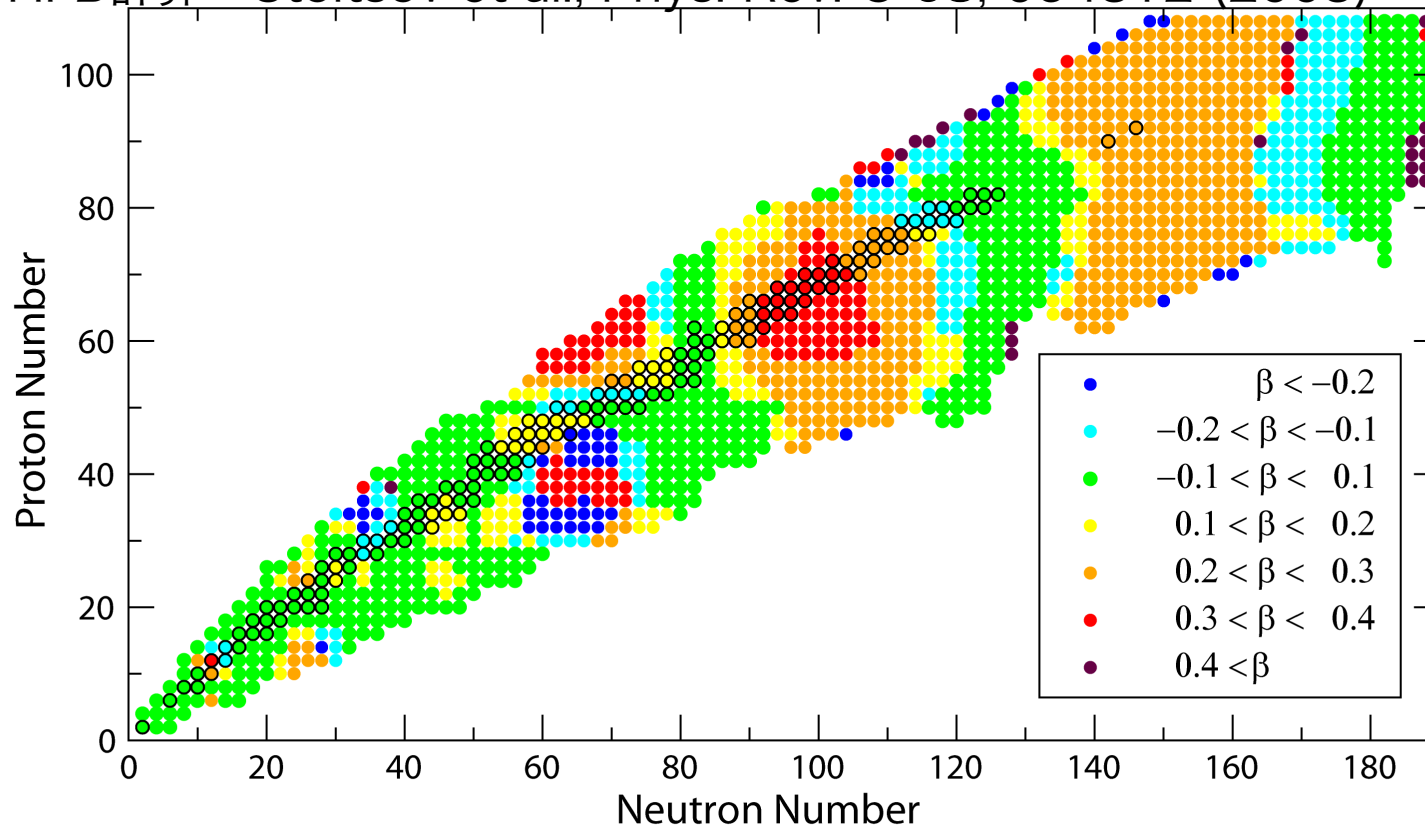
平均場理論はSlater行列式1個で原子核を記述：ベストなSlater行列式を求める
一粒子模型空間の制限は少ない(1000軌道程度は簡単に取れる)
取り込める多体相関は一体場に限られて少ない(変形と対凝縮は取り込める)

平均場理論計算

全核種計算が可能(時間反転対称性を破る奇核はちょっと難しいので偶々核だけ)

基底状態での四重極変形

軸対称HFB計算 : Stoitsov et al., Phys. Rev. C 68, 054312 (2003)



閉殻(魔法数20,28,50,82,126)付近では球形、開殻では四重極変形

相互作用

殻模型では模型空間に応じて有効相互作用を決定

→ 質量領域ごとに最適化された相互作用

平均場計算では一つの相互作用ですべての核種の計算が可能(核物質まで含む)

→ 全質量領域で最適化された相互作用(密度汎関数)

密度汎関数理論(density functional theory; DFT)

→ 電子系の記述に成功した理論、平均場理論と同じ形式

Hohenberg-Kohnの定理

エネルギー汎関数 $E[\rho]$ が存在、これを最小化することによって
基底状態の密度とエネルギーが求まる

原子核の平均場理論で使われる密度汎関数(相互作用)

- Skyrme型(局所密度の汎関数)
- Gogny型(非局所密度の汎関数)
- 相対論的平均場理論

いずれも結合定数は基底状態実験データ、核物質の性質で決める

準粒子乱雑位相近似(QRPA)

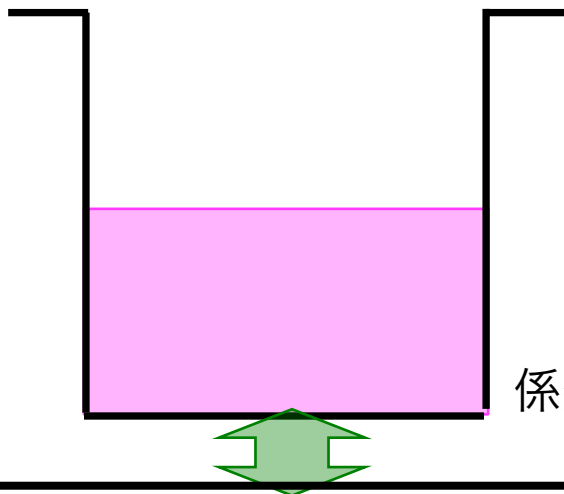
平均場近似：基底状態はSlater行列式

準粒子乱雑位相近似(quasiparticle random-phase approximation)

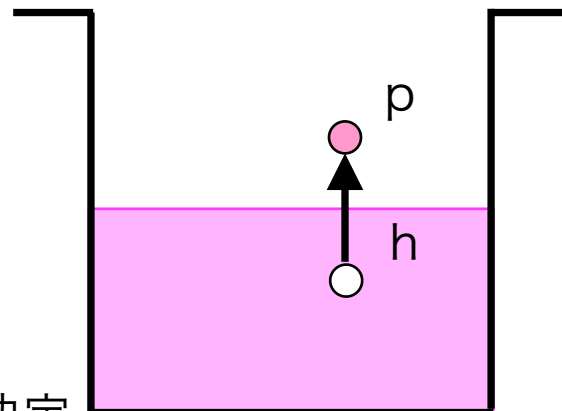
励起状態の理論。基底状態平均場にも摂動的に多体相関を入れる

対凝縮している場合は粒子と空孔の区別をつけない

QRPA基底状態



QRPA励起状態

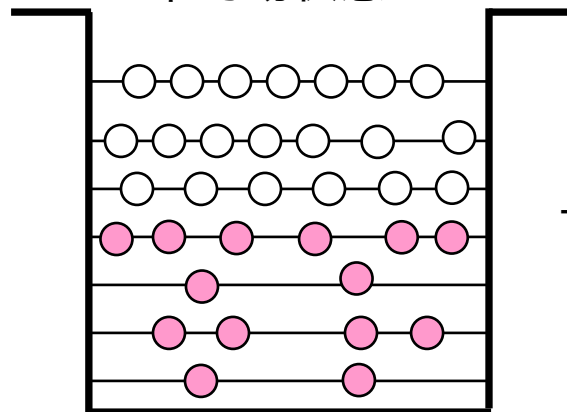


$$\sum_{ph} C'_{ph}{}^\nu$$

係数は残留相互作用から決定
(QRPA方程式)

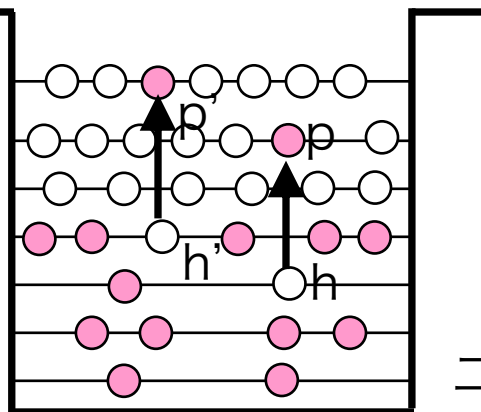
基底状態から見た一粒子一空孔励起
(あるいは2準粒子励起)の重ね合わせ

平均場状態



$$+ \sum_{php'h'} C'_{php'h'}$$

これらの係数は
自動的に決まる

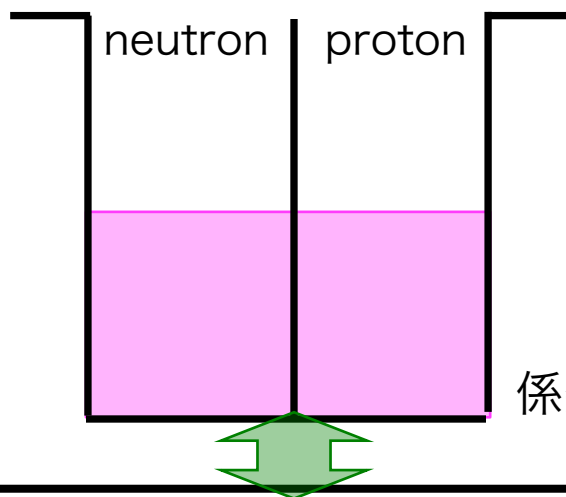


二粒子二空孔相関

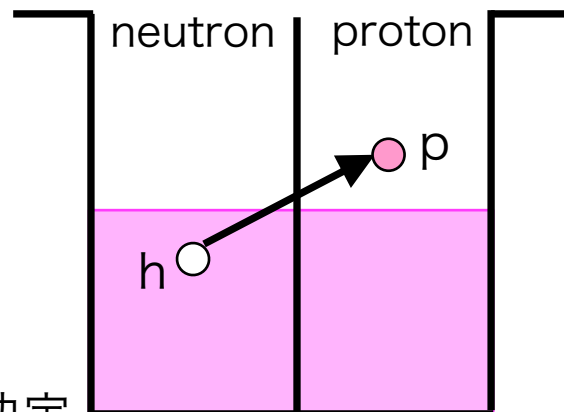
準粒子乱雑位相近似(QRPA)

ベータ崩壊・ガモフテラー巨大共鳴への応用：proton-neutron QRPA

QRPA基底状態
(N,Z)核



QRPA励起状態
(N-1, Z+1)核

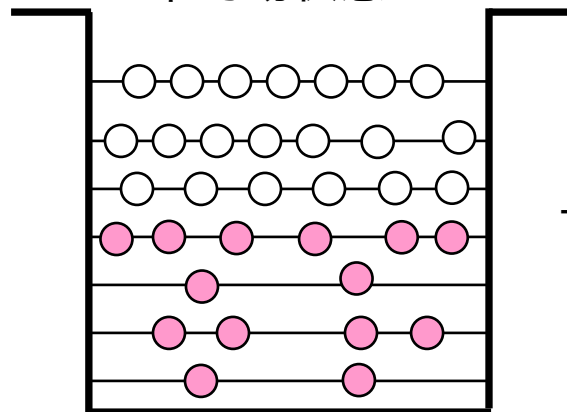


$$\sum_{ph} C_{ph}^{\nu}$$

係数は残留相互作用から決定
(QRPA方程式)

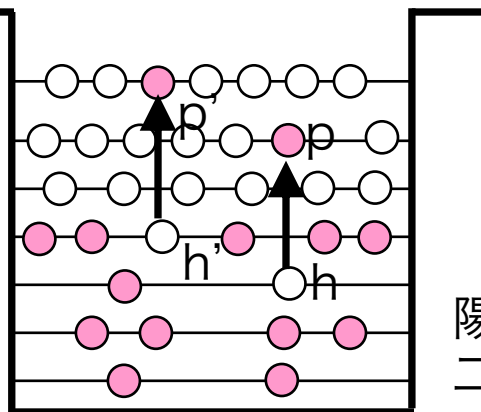
基底状態から見た一粒子一空孔励起
(あるいは2準粒子励起)の重ね合わせ

平均場状態



$$+ \sum_{php'h'} C'_{php'h'}$$

これらの係数は
自動的に決まる



陽子・中性子間の
二粒子二空孔相関

準粒子乱雑位相近似(QRPA)

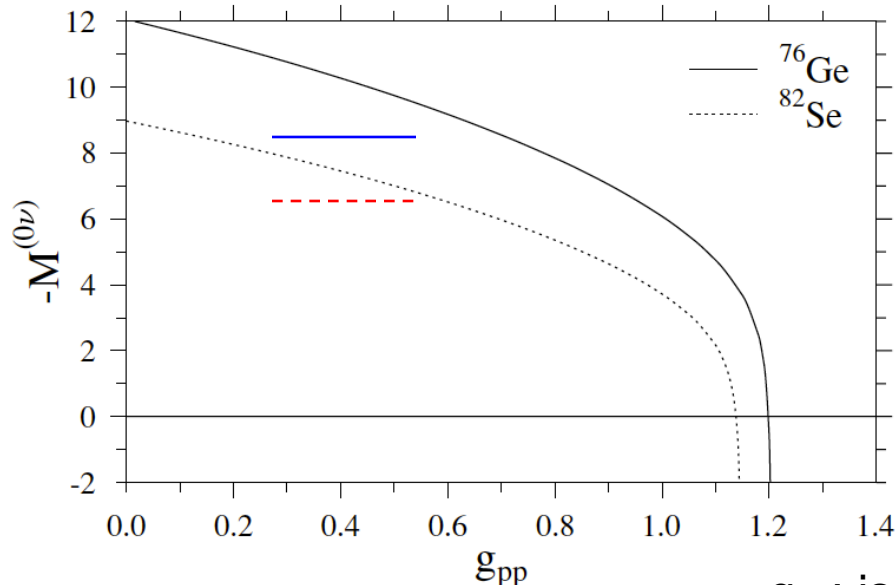
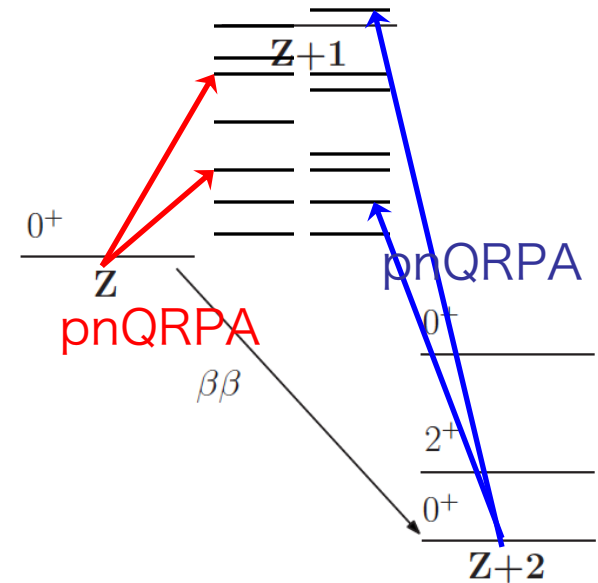
二重ベータ崩壊への応用

$$M_{0\nu}^F = \sum_{a,b,n_i,n_f} H(r_{ab}, \bar{E}) \langle f | \tau_a^+ | n_f \rangle \langle n_f | n_i \rangle \langle n_i | \tau_b^+ | i \rangle$$

$$M_{0\nu}^{GT} = \sum_{a,b,n_i,n_f} H(r_{ab}, \bar{E}) \langle f | \vec{\sigma}_a \tau_a^+ | n_f \rangle \langle n_f | n_i \rangle \langle n_i | \vec{\sigma}_b \tau_b^+ | i \rangle$$

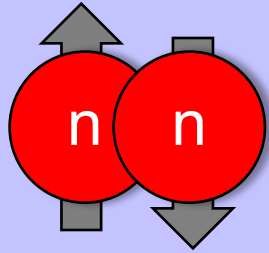
complete set of intermediate odd-odd states

- 中間状態を始状態、終状態それぞれからnpQRPAで作る
- 2つの中間状態は異なる: マッチングが必要
- 中性子-陽子相関を取り込む: 行列要素に大きな依存性
中性子-陽子対相関依存性

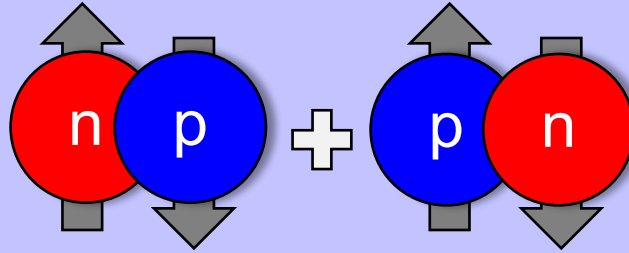


中性子-陽子相関とは

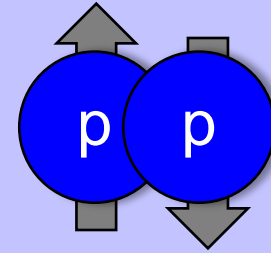
アイソベクトル型 ($T=1, S=0$) 対相関 \rightarrow フェルミ行列要素



$T_z=1$

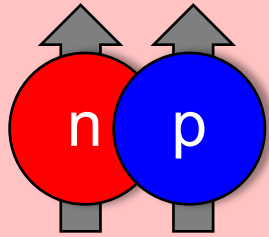


$T_z=0$

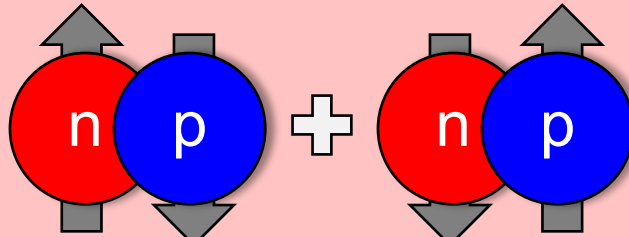


$T_z=-1$

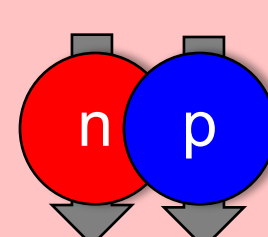
アイソスカラー型 ($T=0, S=1$) 対相関 \rightarrow ガモフテラー行列要素



$S_z=1$



$S_z=0$



$S_z=-1$

σ_T (ガモフテラー演算子型) particle-hole ($T=1, S=1$)
 \rightarrow ガモフテラー行列要素

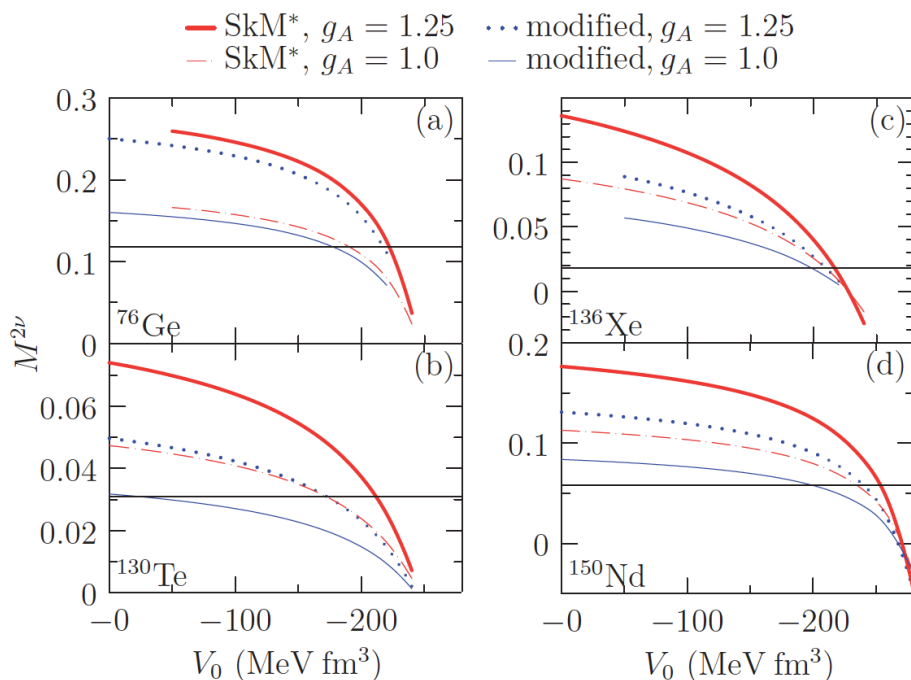
アイソスカラー型対相関：関連する実験データが少なくよくわかっていない

準粒子乱雑位相近似(QRPA)

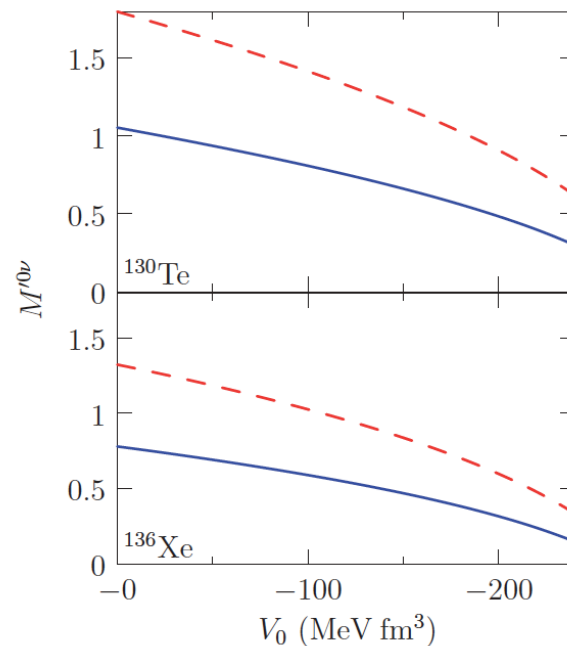
Mustonen and Engel, Phys. Rev. C 87, 064302 (2013)

- Skyrme密度汎関数を用いたpnQRPA計算
- ^{76}Ge , ^{130}Te , ^{136}Xe , ^{150}Nd を計算
- 大規模計算: 一準粒子 $\sim 10^3$ 次元、二準粒子 5×10^5 次元
→ 二準粒子で15,000次元にカットして対角化
- アイソスカラー対相関の強さ V_0 は $2\nu\beta\beta$ の実験値で決定

$2\nu\beta\beta$



$0\nu\beta\beta$



	SkM*		Modified SkM*	
	$g_A = 1.0$	$g_A = 1.25$	$g_A = 1.0$	$g_A = 1.25$
^{76}Ge	4.40	5.53	4.12	5.09
^{130}Te	1.13	1.38	1.32	1.37
^{136}Xe	1.26	1.68	1.18	1.55
^{150}Nd	2.52	3.14	2.14	2.71

変形核の原子核行列要素も計算できるが大規模計算

有限振幅法によるQRPA効率的解法

NH and Engel, in preparation

QRPA: 大次元の行列対角化問題(次元: $\sim 10^6$):

QRPA: 時間依存密度汎関数理論(TDDFT)の小振幅近似としても定式化可能
時間依存する外場に対する線形応答理論として定式化

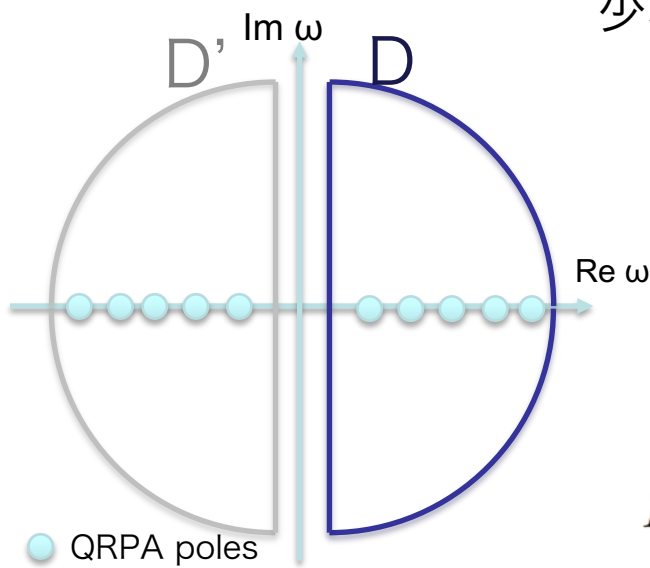
→与えられた振動数を持つに対して反復法で効率的に解ける(有限振幅法)

複素積分による定式化

応答関数は振動数の実軸上に1位の極(中間励起状態に対応)

複素積分によって極の寄与を足し上げて原子核行列要素を計算

少なくとも $2\nu\beta\beta$ の行列要素は効率的に並列計算できる



$$\mathcal{M}(\alpha, \hat{F}_{F/GT}^K; f_{p'n',pn}(\omega_i, \omega_f)) =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_D d\omega_i \int_{D'} d\omega_f \sum_{pn} \sum_{p'n'} \mathcal{T}_{pn,p'n'}(\alpha, \omega_i, \omega_f, \hat{F}_{F/GT}^K) f_{p'n',pn}(\omega_i, \omega_f)$$

$$M_F^{2\nu} = \mathcal{M}(\alpha, \hat{F}_F^{K=0}; f_{p'n',pn}(\omega_i, \omega_f)) = \frac{2\mathcal{O}_{p'p}(\alpha)\mathcal{O}_{n'n}(\alpha)}{\omega_i - \omega_f}$$

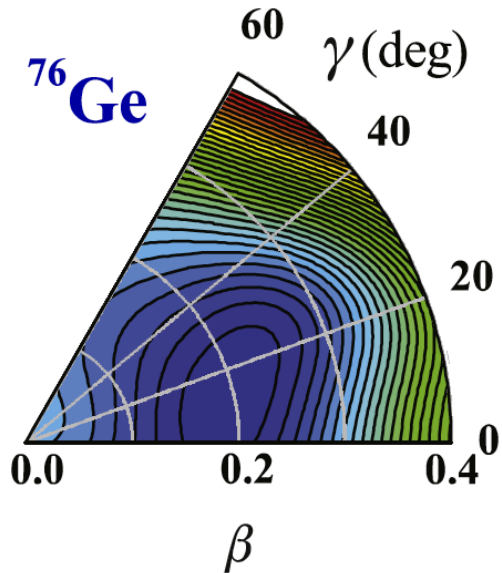
$$M_{GT}^{2\nu} = \sum_{K=-1}^1 \mathcal{M}(\alpha, \hat{F}_{GT}^K; f_{p'n',pn}(\omega_i, \omega_f)) = \frac{2\mathcal{O}_{p'p}(\alpha)\mathcal{O}_{n'n}(\alpha)}{\omega_i - \omega_f}$$

アイソスカラー対相関の結合定数を $2\nu\beta\beta$ の実験値で最適化可能に？

npQRPAの問題

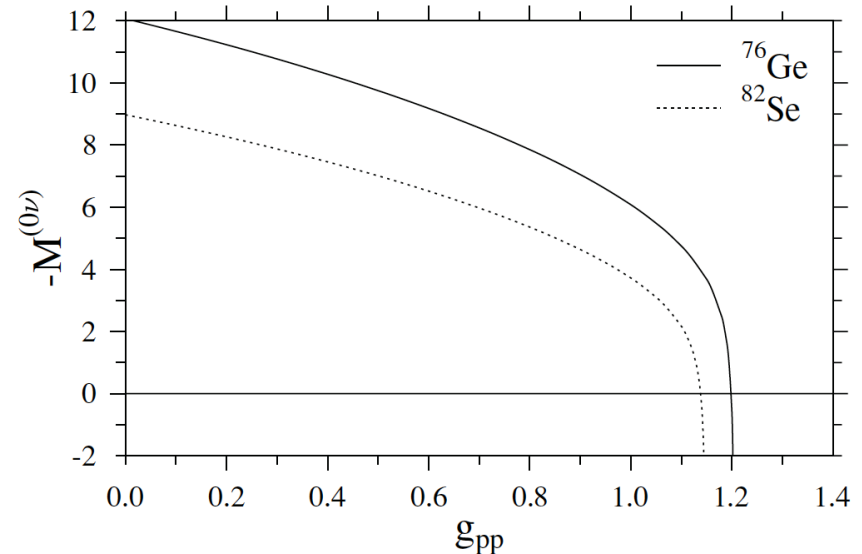
QRPA: 基底状態の平均場近似が摂動論の出発点として有効な場合
系が相転移に近くない場合(ゆらぎが小さい場合)

変形のゆらぎ
変形共存現象



J.J.Sun et al, PLB734, 308 (2014)

QRPAの破綻
(アイソスカラー対凝縮相への相転移)



Kortelainen and Suhonen, PRC75, 051303(2007)

- 二重ベータ崩壊核: $N \gg Z$ でアイソスカラー型対凝縮はおこらない(相転移前)
- g_{pp} の値はよくわかっていない→相転移までどれくらいか不明

生成座標法(GCM)

平均場を生成座標 q (集団自由度)にそって重ね合わせて基底状態を構築

$$|\Psi_k\rangle = \sum_q f_k(q) |\phi(q)\rangle \leftarrow \text{平均場}$$

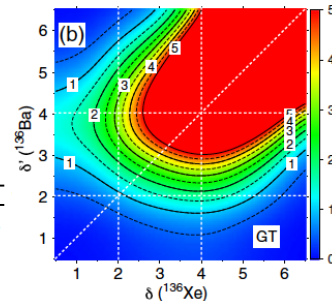
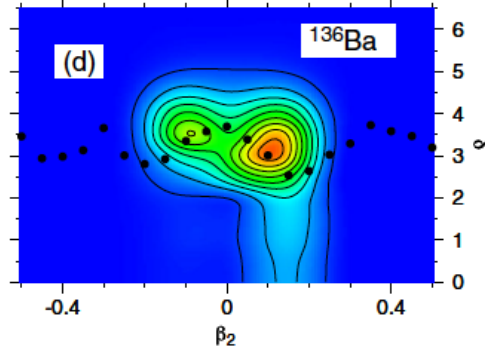
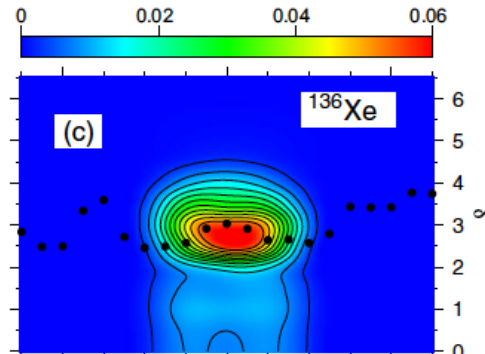
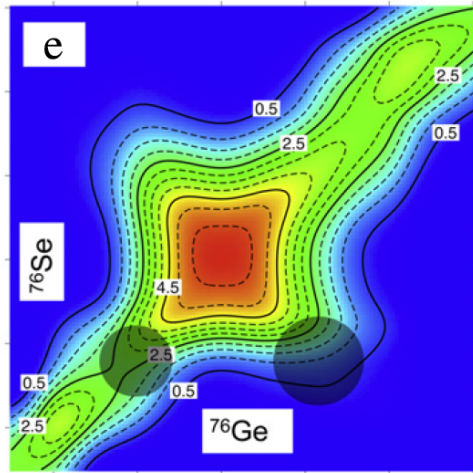
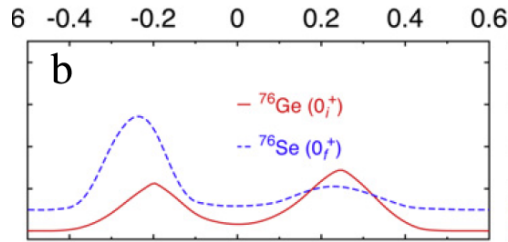
二重ベータ崩壊始状態・終状態 q 重み関数

- 殻模型：基底のSlater行列式は直交基底、平均場：非直交基底(数百個程度)
- q を適切に選ぶことで重要な集団相関を選択的に取り入れる (変形パラメター、対振幅など、相転移の秩序変数を入れれば相転移近傍の量子ゆらぎも記述可能)
- 重み関数はSchrödinger方程式(Hill-Wheeler方程式)で決定
- 一般的に一体平均場は対称性を破って集団相関を取り込むため重ね合わせる前に対称性の回復が必要：粒子数射影と角運動量射影
→大規模計算になる
- 殻模型と比べると大きな一粒子空間
- 原子核行列要素計算ではEDFと呼ばれる(密度汎関数理論を使っているため)
- 奇核の計算は難しい：closure approximationを使うので $2\nu\beta\beta$ は評価できない。

GCM (Gogny D1S)

生成座標に四重極変形度 β
を用いた例

対相関と変形



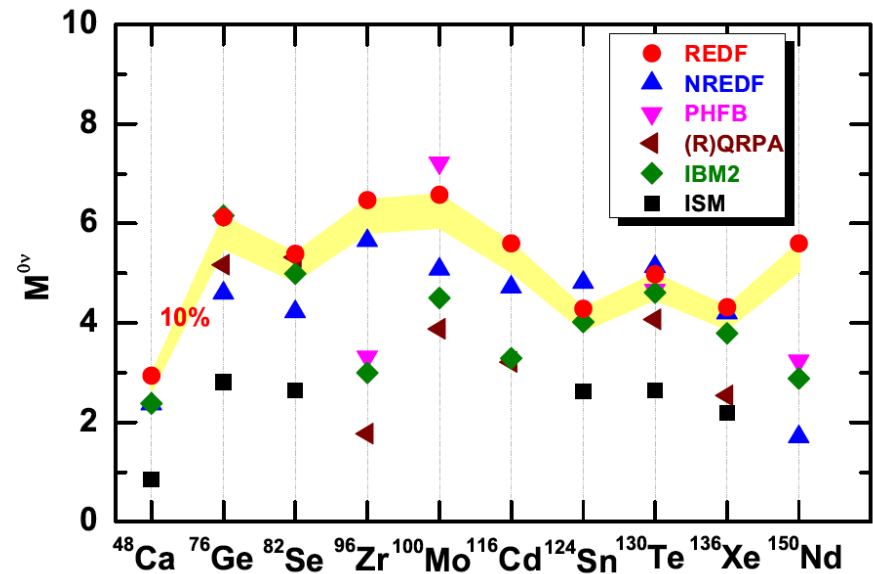
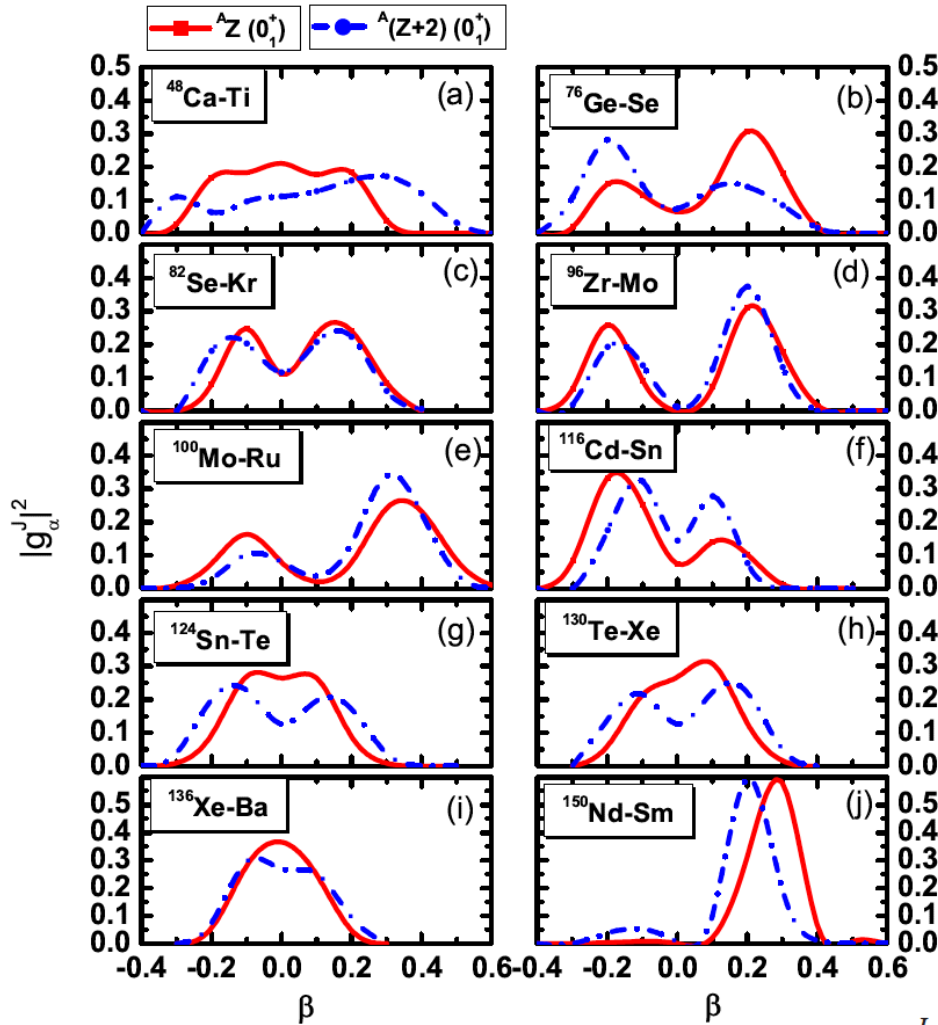
$$M_{\xi}^{0\nu}(\beta_i, \beta_f) = \frac{\langle \Phi_{\beta_f} | P^{N_f} P^{Z_f} \hat{M}_{\xi}^{0\nu} P^{I=0} P^{N_i} P^{Z_i} | \Phi_{\beta_i} \rangle}{\sqrt{\langle \Phi_{\beta_f} | P^{I=0} P^{N_f} P^{Z_f} | \Phi_{\beta_f} \rangle} \sqrt{\langle \Phi_{\beta_i} | P^{I=0} P^{N_i} P^{Z_i} | \Phi_{\beta_i} \rangle}}$$

Isotope	$M^{0\nu}(\beta_2)$	$M^{0\nu}(\beta_2, \delta)$
^{48}Ca	2.370 ^{1.914} _{0.456}	2.229 ^{1.797} _{0.431}
^{48}Ti		
^{76}Ge	4.601 ^{3.715} _{0.886}	5.551 ^{4.470} _{1.082}
^{76}Se		
^{82}Se	4.218 ^{3.381} _{0.837}	4.674 ^{3.743} _{0.931}
^{82}Kr		
^{96}Zr	5.650 ^{4.618} _{1.032}	6.498 ^{5.296} _{1.202}
^{96}Mo		
^{100}Mo	5.084 ^{4.149} _{0.935}	6.588 ^{5.361} _{1.227}
^{100}Ru		
^{116}Cd	4.795 ^{3.931} _{0.864}	5.348 ^{4.372} _{0.976}
^{116}Sn		
^{124}Sn	4.808 ^{3.893} _{0.916}	5.787 ^{4.680} _{1.107}
^{124}Te		
^{128}Te	4.107 ^{3.079} _{1.027}	5.687 ^{4.255} _{1.432}
^{128}Xe		
^{130}Te	5.130 ^{4.141} _{0.989}	6.405 ^{5.161} _{1.244}
^{130}Xe		
^{136}Xe	4.199 ^{3.673} _{0.526}	4.773 ^{4.170} _{0.604}
^{136}Ba		
^{150}Nd	1.707 ^{1.278} _{0.429}	2.190 ^{1.639} _{0.551}
^{150}Sm		

T. Rodriguez and G. Martinez-Pinedo, Prog. Part. Nucl. Phys. **66**, 436 (2011)
Vaquero, Rodriguez, Egido, Phys. Rev. Lett. **111**, 142501 (2013)

GCM (相対論的平均場理論)

生成座標: 軸対称変形度 β



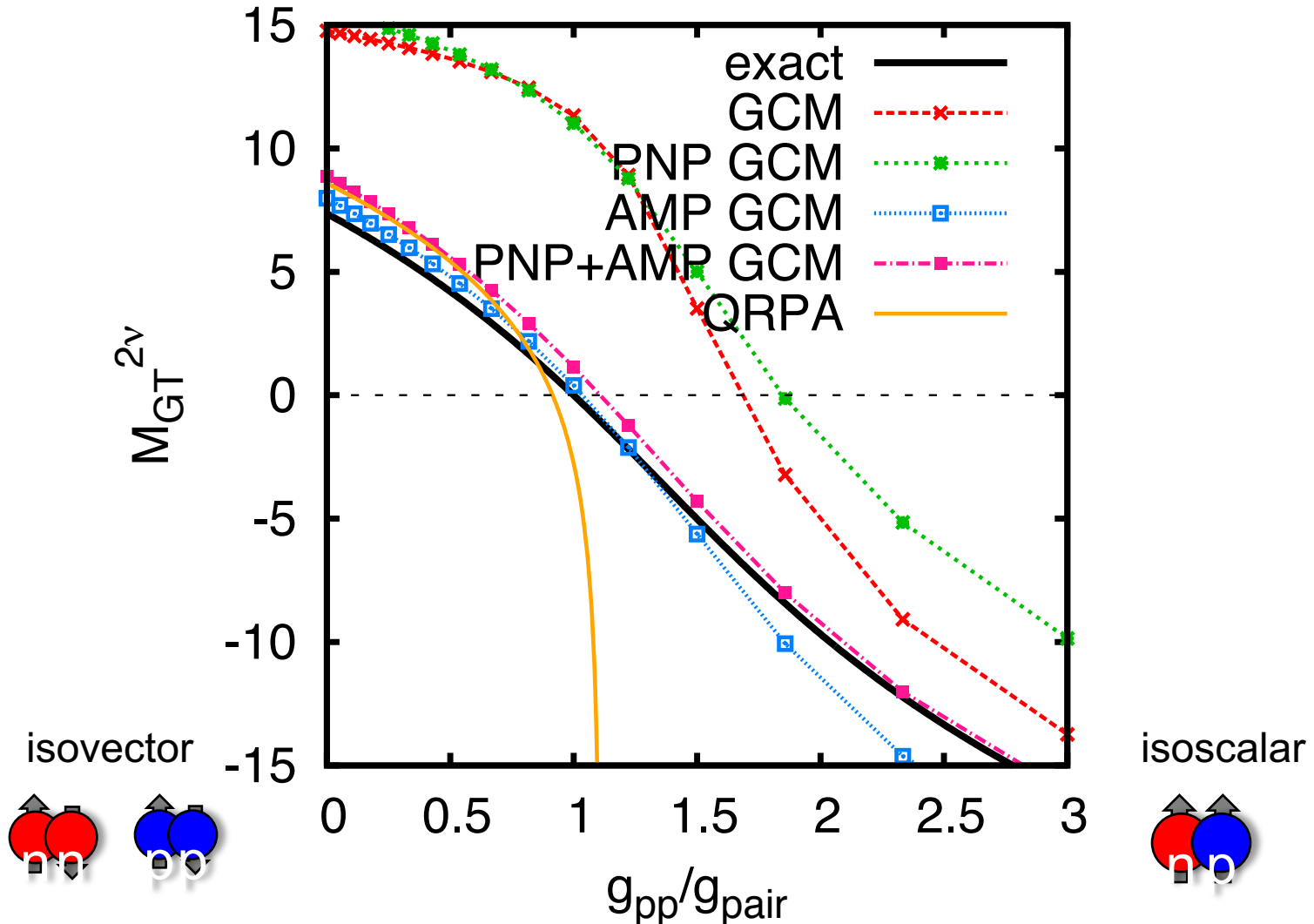
Yao et al. Phys. Rev. C **91**, 024316 (2015)
 Song et al., Phys. Rev. C **90**, 054309 (2014)

GCM計算では原子核行列要素は大きくなる傾向にある

中性子-陽子対相関を入れたGCM

アイソスカラー対振幅を生成座標にしたGCM(簡単な模型Hamiltonian)

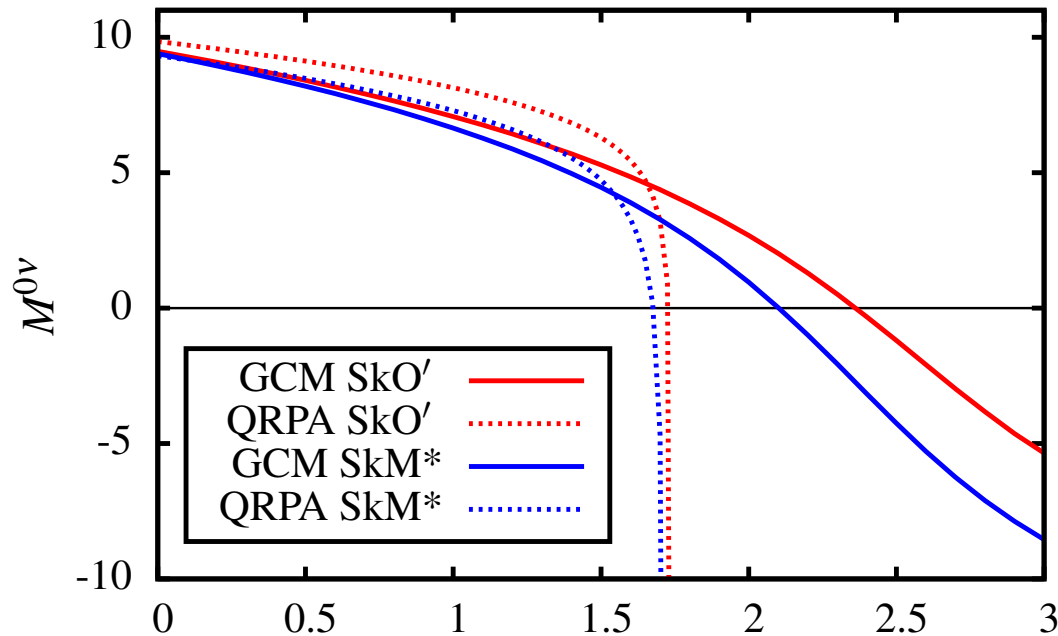
$2\nu\beta\beta$ 行列要素(closure approximation)



$^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se} \ 0\nu$ 行列要素(1D GCM)

NH and J. Engel, Phys. Rev. C **90**, 031301(R) (2014)

四重極変形を入れない計算(S=1のアイソスカラー対相関は回転対称性を破る)



$g_{pp} = 1.47(\text{SkO}'), 1.56(\text{SkM}^*)$ $g^{T=0}/\bar{g}^{T=1}$

QRPA: 相転移近傍で破綻 ($g^{T=0}/g^{T=1} \sim 1.6$)

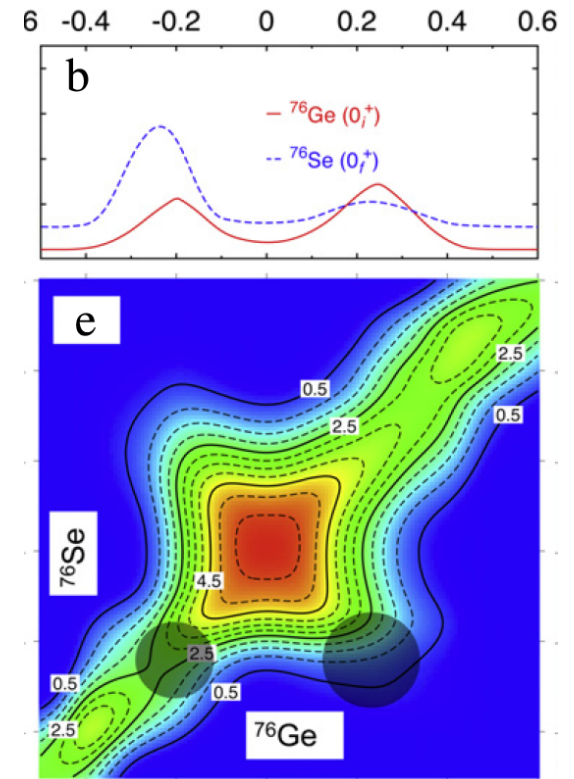
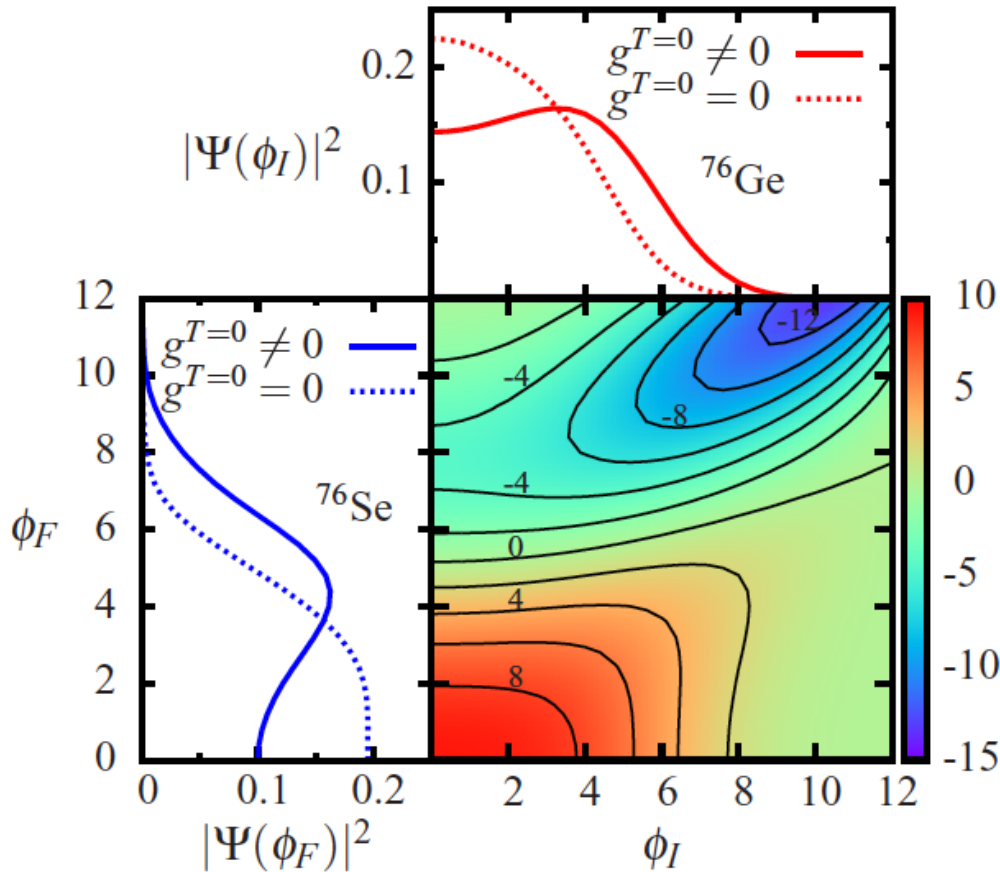
GCM: アイソスカラー対相関強度に対してなめらかな振る舞い

Skyrme	no gph/ $g^{T=0}$	no $g^{T=0}$	1D full	QRPA
SkO'	14.0	9.5	5.4	5.6
SkM*	11.8	9.4	4.1	3.5

$^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se} 0\nu$ matrix element

行列要素と集団波動関数二乗 NH and J. Engel, Phys. Rev. C **90**, 031301(R) (2014)

similar plot for β
(Rodriguez)



生成座標: $\phi = \frac{\langle P_0 + P_0^\dagger \rangle}{2}$

変形度が同じところで行列要素
が大きくなる

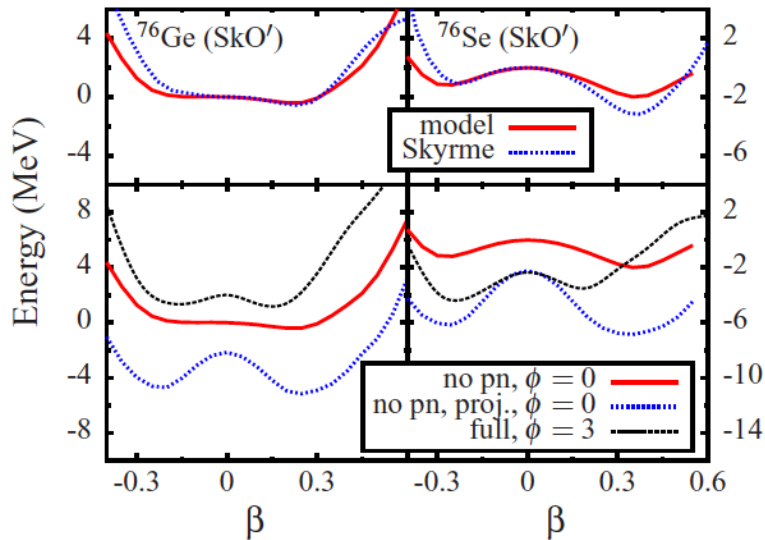
アイソスカラー対相関: 行列要素の非対角部分も重要

終状態のアイソスカラー対振幅が大きいところが抑制に効く

波動関数は相転移前でもアイソスカラー対相関で対振幅の大きい状態にシフト

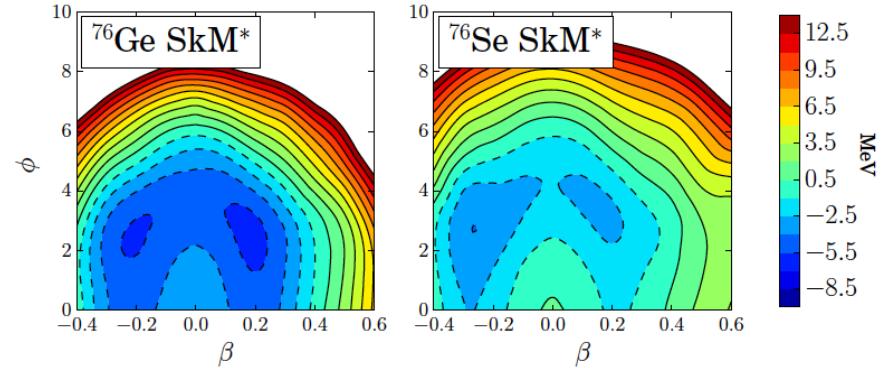
四重極変形も入れた計算(2D GCM)

変形ポテンシャルエネルギー



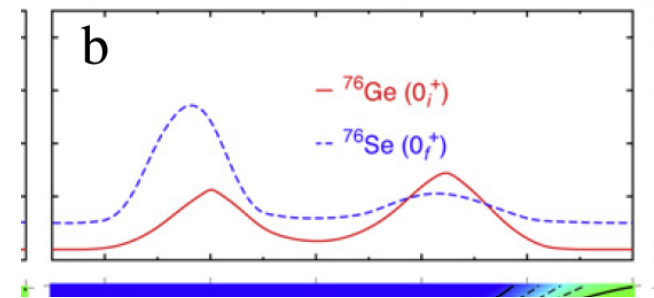
$g_{pp} = 1.75(\text{SkO}'), 1.51(\text{SkM}^*)$

射影ポテンシャルエネルギー



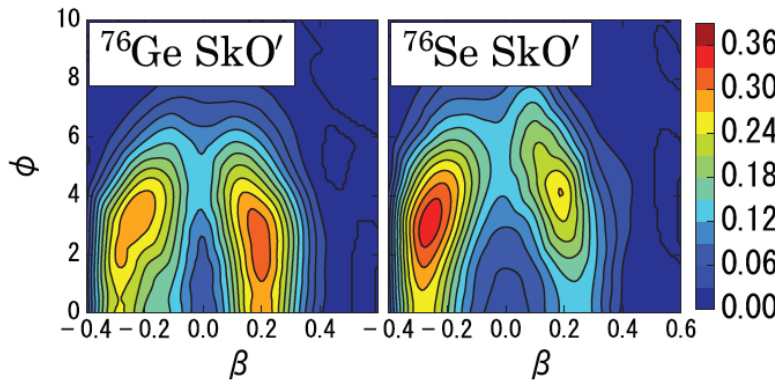
Rodriguez and Martinez-Pinedo
Prog. Part. Nucl. Phys. **66** (2011) 436.

.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6



Gogny beta-GCM: 4.6
PRL 105, 252503 (2010)
Gogny beta+delta GCM: 5.6
PRL 111, 142501 (2013)
Skyrme pnQRPA SkM*: 5.1
PRC 87, 064302 (2013)

集団波動関数二乗



行列要素

Skyrme	1D full	2D full	spherical QRPA
SkO'	5.4	4.7	5.6
SkM*	4.1	4.7	3.5

pf殻での殻模型計算との行列要素の比較

Menéndez, NH et al., Phys. Rev. C**93**, 014305 (2016)

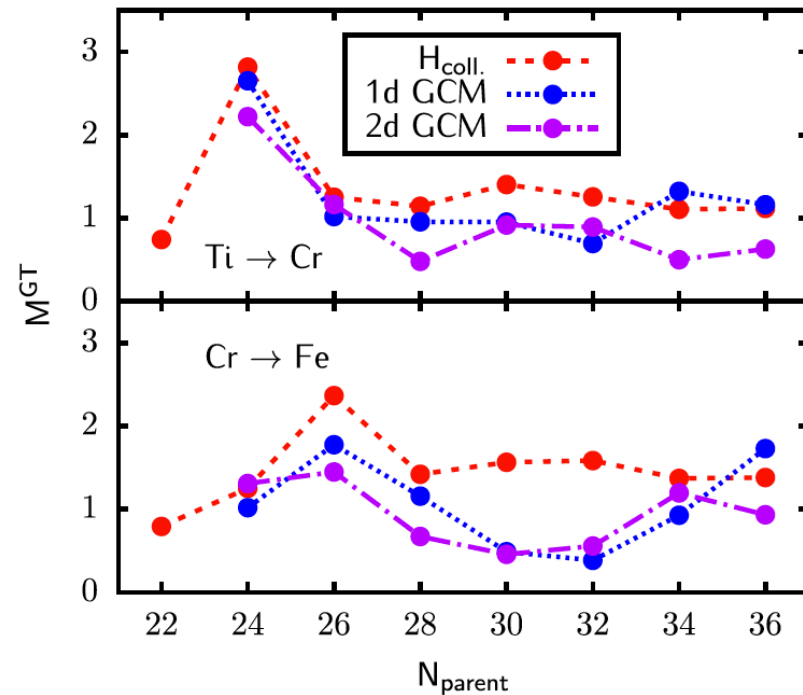
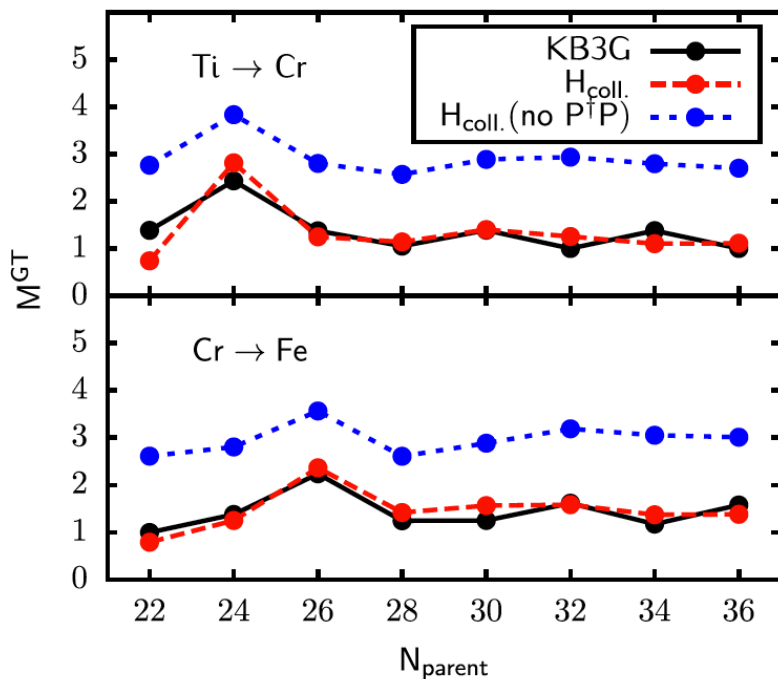
pf殻模型空間: 殻模型の厳密対角化が可能

Shell model: KB3G interaction (red)

Dufour and Zuker: 分離型集団HamiltonianをKB3Gから導出

GCM: P0のみ(1dGCM)、P0と β (2d GCM)

Dufour and Zuker, Phys. Rev. C**54**, 1641 (1996)

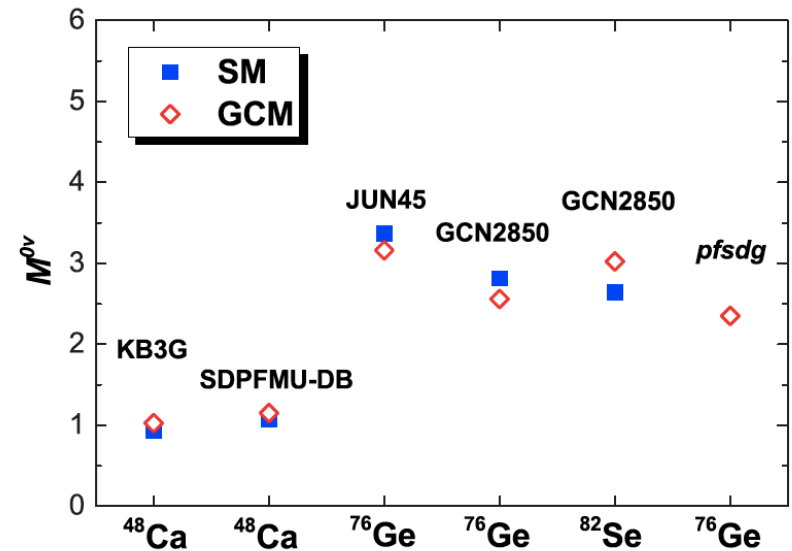
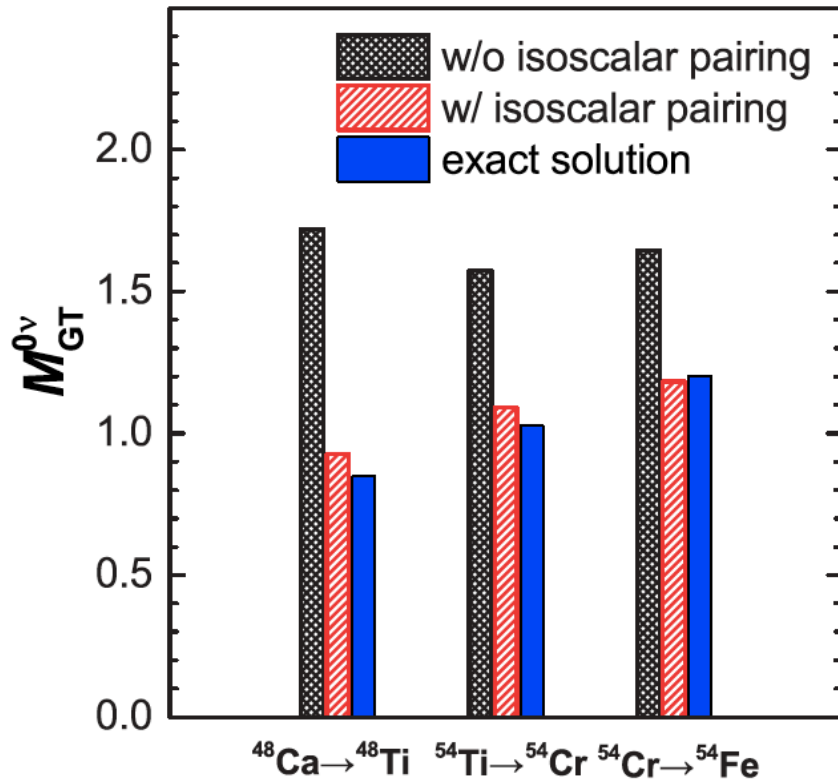


アイソスカラー対相関のような集団相関は軽い核でも重要

- 分離型集団Hamiltonianは現実的な有効相互作用のよい近似(原子核行列要素計算で)
- GCMは殻模型厳密解の良い近似 \rightarrow ^{136}Xe や ^{150}Nd など中重核の計算へ

殻模型計算との行列要素の比較

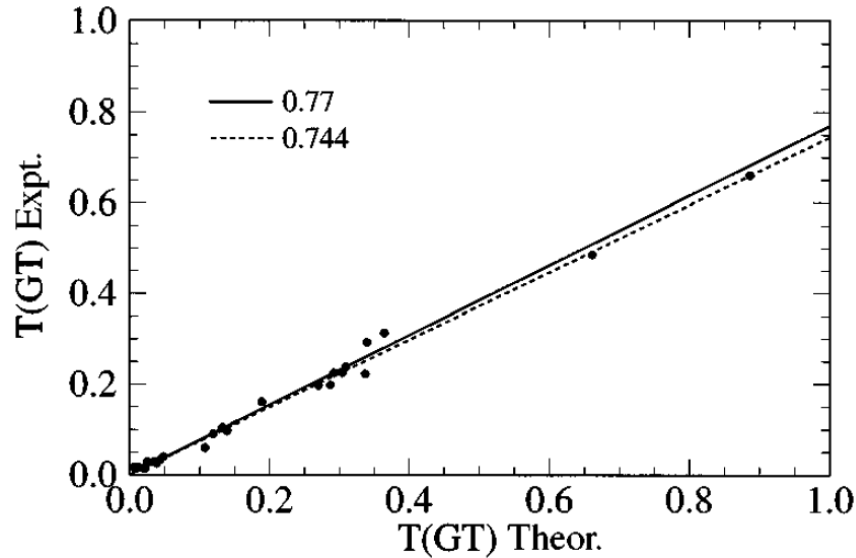
Jiao et al., Phys. Rev. C 96, 054310 (2017)



アイソスカラー対相関の自由度を生成座標に入れたGCMによって
殻模型計算との原子核行列要素の値が一致

g_A クエンチング

ベータ崩壊の実験値と理論値に系統的なずれ(pf殻の殻模型計算)



Martinez-Pinedo, Phys. Rev. C 53, R2606 (1996)

$$\hat{M}_\beta = g_A \sum_i \sigma_i \tau_i^+$$

$$g_A \sim 1.27$$

$$g_{A\text{eff}} \sim 0.7 g_A ?$$

クエンチングの理由は不明。二重ベータ崩壊演算子では？

まとめ

- 二重ベータ崩壊の原子核行列要素
- SM(殻模型)
 - 多体相関を完全に取り込む厳密解
 - 扱える模型空間は狭い
- QRPA(準粒子乱雑位相近似)
 - 二準粒子相関のみ取り入れる
 - 中性子-陽子対相関
- EDF (GCM、生成座標法)
 - 生成座標に沿った相関(変形・対相関)
 - 中性子-陽子対相関は含まない
 - 中性子-陽子対相関を含むと殻模型と一致

