

擬南部-ゴールドストーン暗黒物質と ゲージ化された $U(1)_{B-L}$ 対称性

阿部慶彦
(京都大学)

Based on

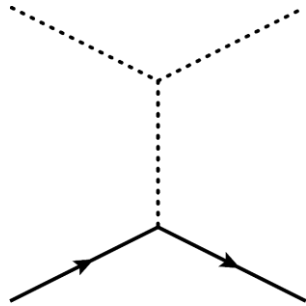
JHEP 05 (2020) 057 [arXiv:2001.03954 [hep-ph]]

共同研究者：藤間崇(金沢大学), 津村浩二(九州大学)

概要

1. WIMP暗黒物質と直接探索実験からの制限

⇒ 擬南部-ゴールドストーンボソン(pNGB)暗黒物質



$$i\mathcal{M} \sim i\mathcal{M}_1 q^2 \xrightarrow{q \rightarrow 0} 0$$

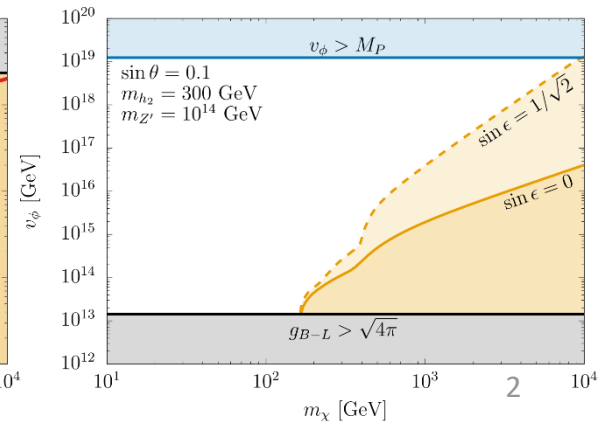
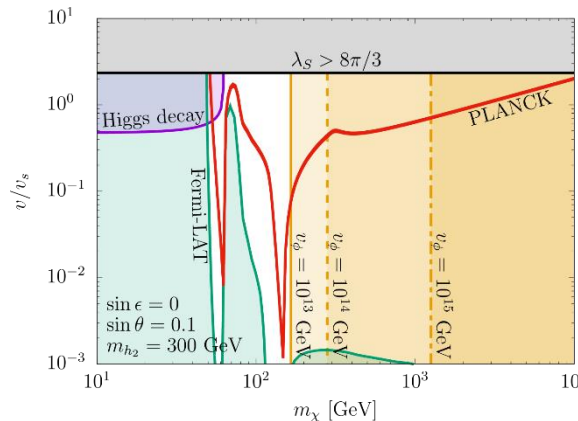
2. pNGB暗黒物質模型の紫外完全化は？

⇒ ゲージ化された $U(1)_{B-L}$ 対称性の模型

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_{B-L}$$

3. 暗黒物質の性質

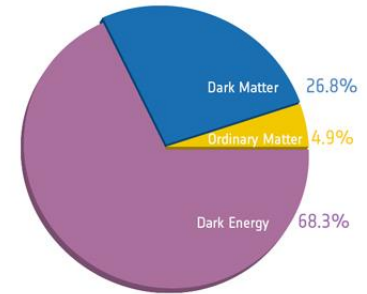
- 寿命
- 暗黒物質残存量
- 観測からの制限



WIMP暗黒物質

• 暗黒物質

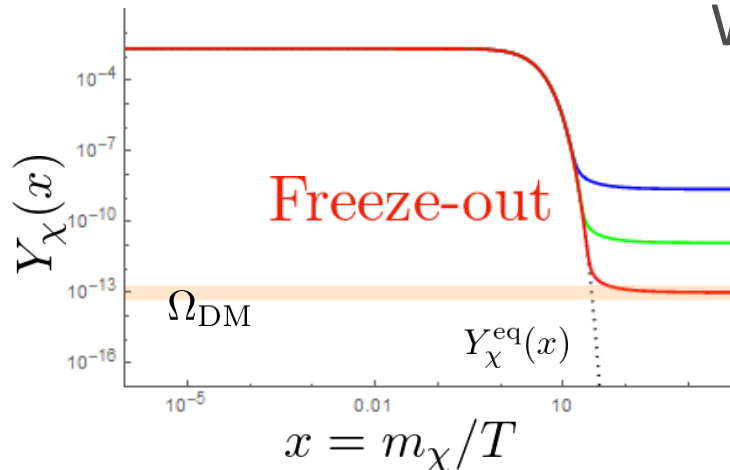
- 様々な観測と実験から暗黒物質の存在はゆるぎない(だろう)
- 暗黒物質の性質はまだ未解明
- 暗黒物質の同定 \Rightarrow BSM



• WIMP暗黒物質

- 熱的残存量によって暗黒物質の残存量を説明

WIMPに対する Boltzmann 方程式



$$\frac{dY_{\chi}(x)}{dx} = \frac{\langle \sigma v \rangle s}{xH} \left(Y_{\chi}(x)^2 - Y_{\chi}^{\text{eq}}(x)^2 \right)$$

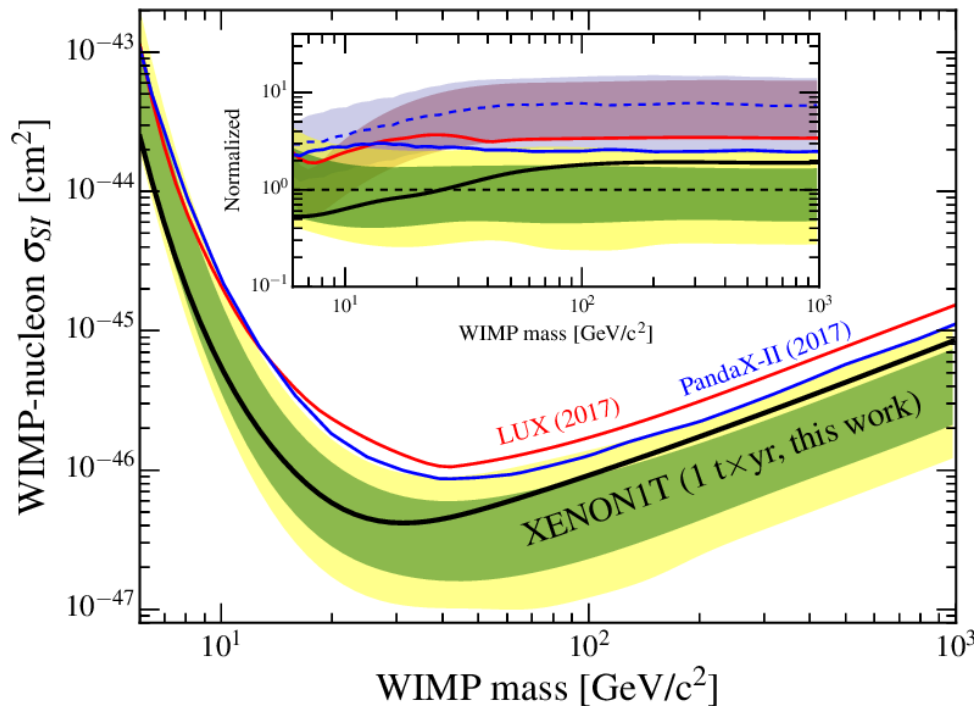
Γ_{χ} vs H

直接探索

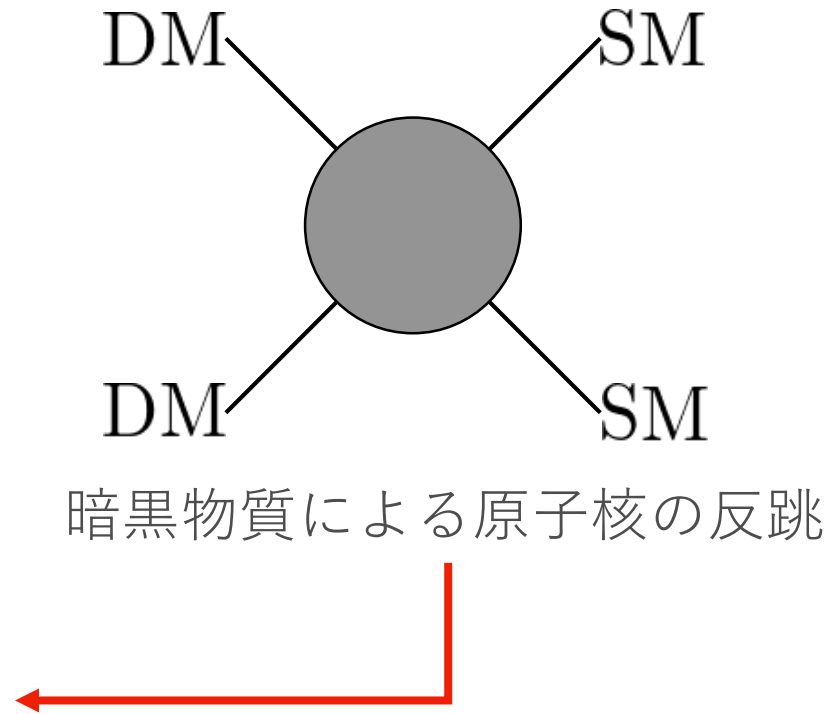
- 直接探索実験

LUX, PandaX-II, XENON

⇒ WIMPと核子の相互作用に **強い制限** が与えられている



XENON collaboration (2018)



擬南部-ゴールドストーン暗黒物質

[Gross-Lebedev-Toma (2017),...]

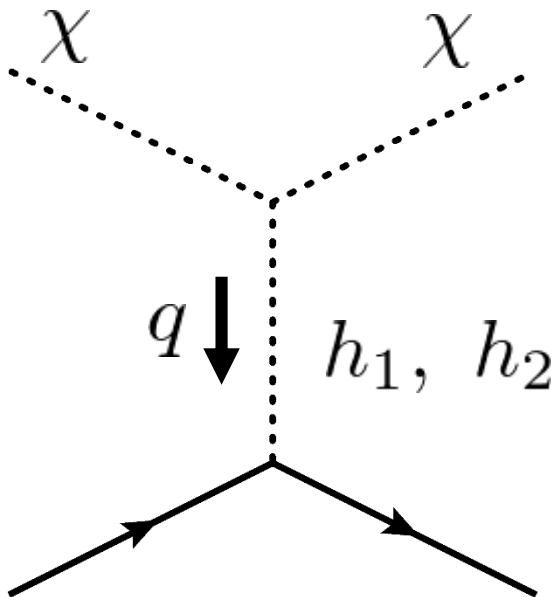
- PNGB暗黒物質模型

SM + SM singlet scalar S

$$V(H, S) = -\frac{\mu_H^2}{2}|H|^2 - \frac{\mu_S^2}{2}|S|^2 + \frac{\lambda_H}{2}|H|^4 + \frac{\lambda_S}{2}|S|^4 + \lambda_{HS}|H|^2|S|^2 - \frac{m^2}{4}(S^2 + S^{*2})$$

Soft breaking term \Rightarrow 暗黒物質の質量

散乱振幅



$$i\mathcal{M} \sim i\mathcal{M}_1 q^2 \xrightarrow{q \rightarrow 0} 0$$

(擬)南部-ゴールドストーンボソン(NGB)

\Rightarrow 相互作用が微分相互作用

\Rightarrow 低エネルギー領域でNGBは自由場

(**soft pion theorem**)

動機

- Soft-breaking termの起源は？

$$V_{\text{soft}}(H, S) = -\frac{m^2}{4}(S^2 + S^{*2})$$

他の項は？くりこみ？対称性は？

- pNGB暗黒物質のUV物理は何なのか？

仮定

- くりこみ可能な場の理論としての記述
- UV物理の対称性は**ゲージ対称性**

No global symmetry

Swampland conjectures?

ゲージ化された $U(1)_{B-L}$ 模型

- 模型の登場粒子

↓ New !!

	Q_L	u_R^c	d_R^c	L	e_R^c	H	ν_R^c	S	Φ
$SU(3)_c$	3	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	1	1	1	1	1	1
$SU(2)_L$	2	1	1	2	1	2	1	1	1
$U(1)_Y$	+1/6	-2/3	+1/3	-1/2	+1	+1/2	0	0	0
$U(1)_{B-L}$	+1/3	-1/3	-1/3	-1	+1	0	+1	+1	+2

我々のゲージ化された $U(1)_{B-L}$ 模型

従来の $U(1)_{B-L}$ 模型

SM

+ RHv ν_R + 新しいゲージ場 X_μ + Singlet scalar Φ Majorana質量を与える

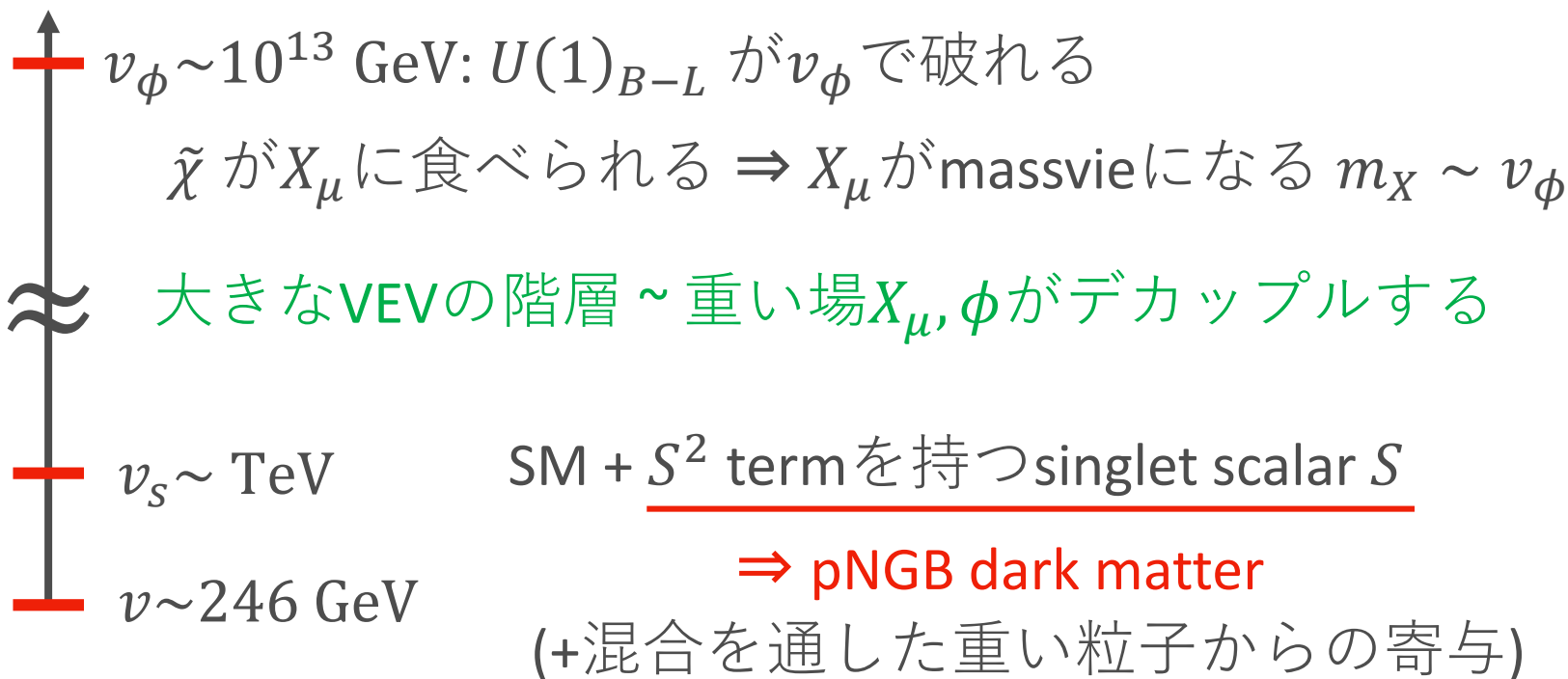
+ Singlet scalar S ← New !!

ゲージ化された $U(1)_{B-L}$ モデルとpNGB暗黒物質

- 直感的な解釈

$$V(H, S, \Phi) = -\frac{\mu_H^2}{2}|H|^2 - \frac{\mu_S^2}{2}|S|^2 - \frac{\mu_\Phi^2}{2}|\Phi|^2 + \frac{\lambda_H}{2}|H|^4 + \frac{\lambda_S}{2}|S|^4 + \frac{\lambda_\Phi}{2}|\Phi|^4 \\ + \lambda_{HS}|H|^2|S|^2 + \lambda_{H\Phi}|H|^2|\Phi|^2 + \lambda_{S\Phi}|S|^2|\Phi|^2 - \left(\frac{\mu_c}{\sqrt{2}}\Phi^* S^2 + \text{c.c.} \right)$$

エネルギースケール



長寿命暗黒物質

- この暗黒物質 χ は、新しいスカラーやゲージ場との相互作用によって安定化されていない。
- 暗黒物質が十分に長寿命であるという制限から、この模型に次の制限が付く。 [Baring-Ghosh-Queiroz-Sinha (2015)]

$$\tau_{\text{DM}} \gtrsim 10^{27} \text{ s} \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_{\text{DM}} \lesssim 6.6 \times 10^{-52} \text{ GeV}$$

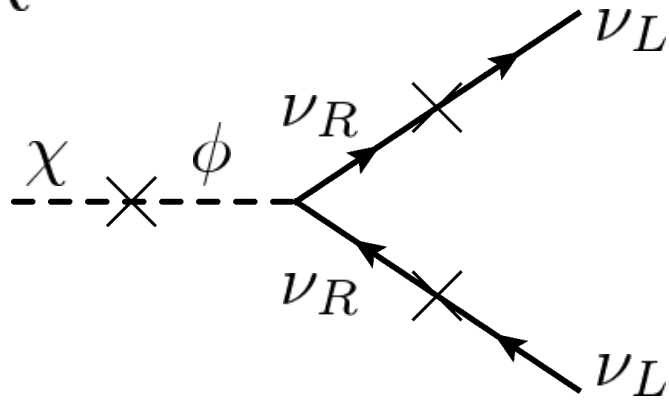
- この暗黒物質の崩壊チャンネルを調べ、長寿命を実現するのかを確認する必要がある。

$$m_{\chi} = 0.5 \text{ TeV}$$

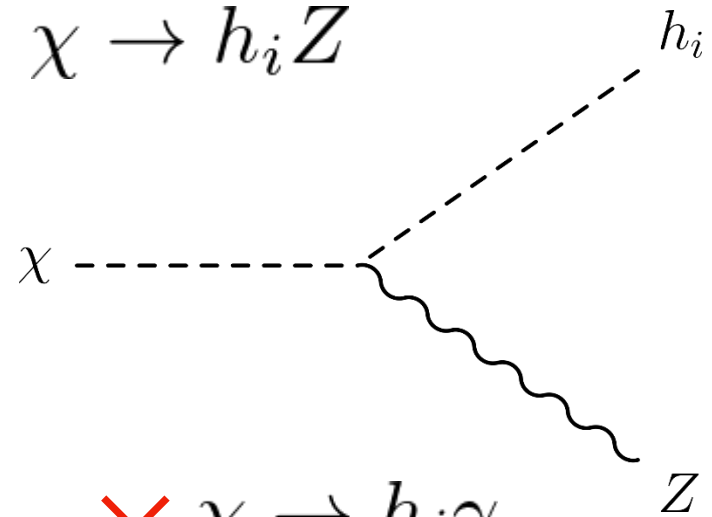
長寿命暗黒物質

2体崩壊

$$\chi \rightarrow \nu\nu$$

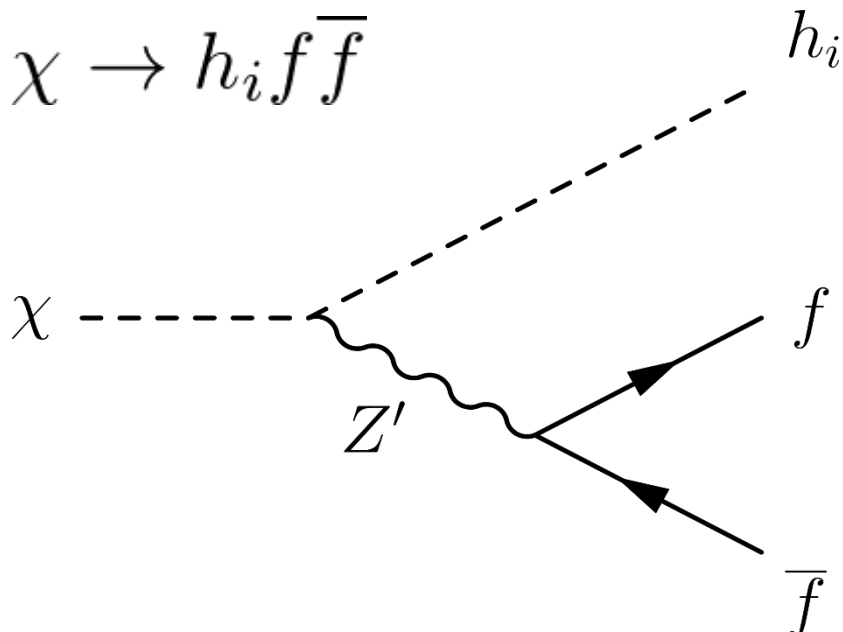


$$\chi \rightarrow h_i Z$$



3体崩壊

$$\chi \rightarrow h_i f \bar{f}$$

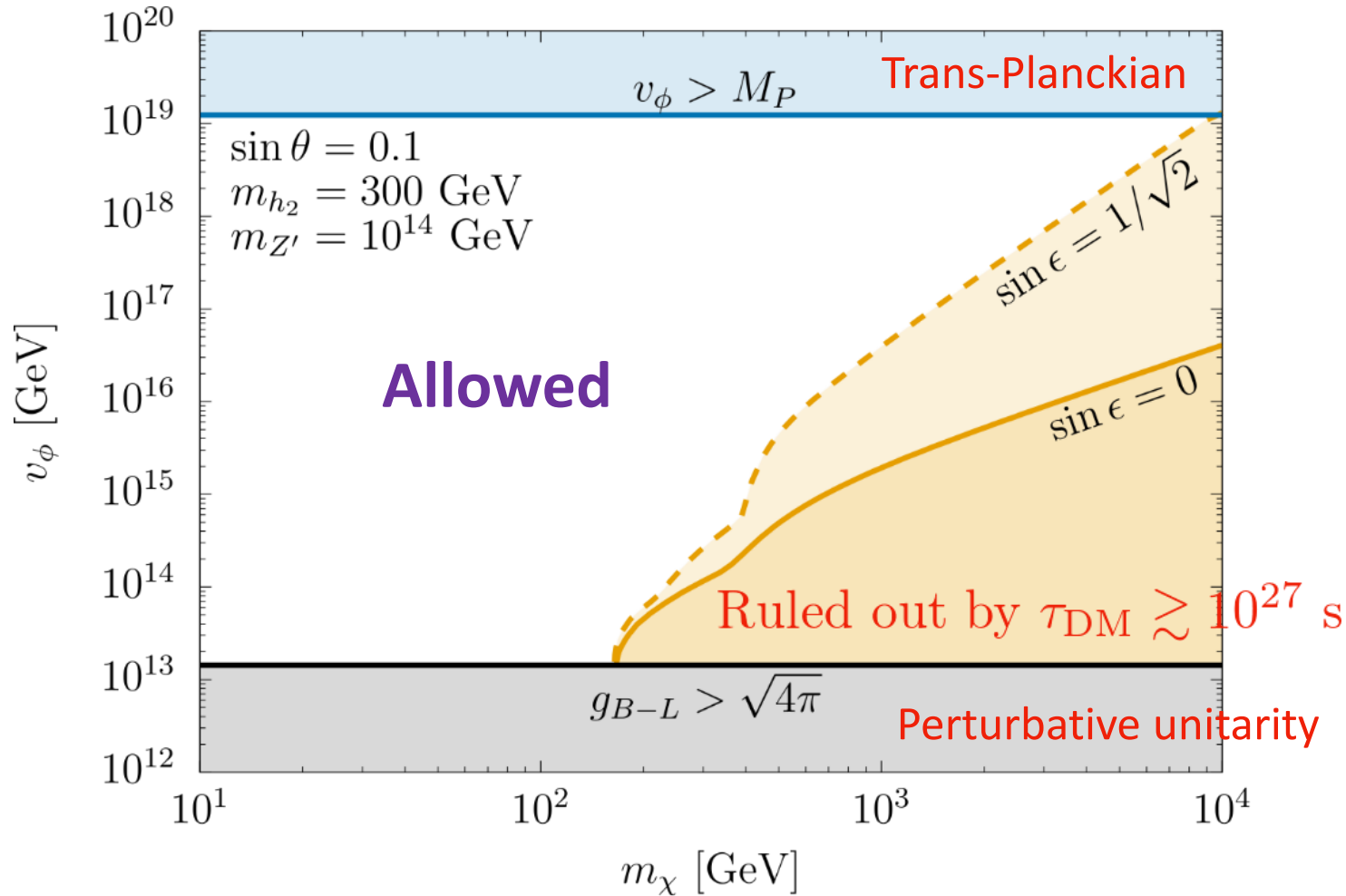


$$\times \chi \rightarrow h_i \gamma$$

∴ ヘリシティ保存

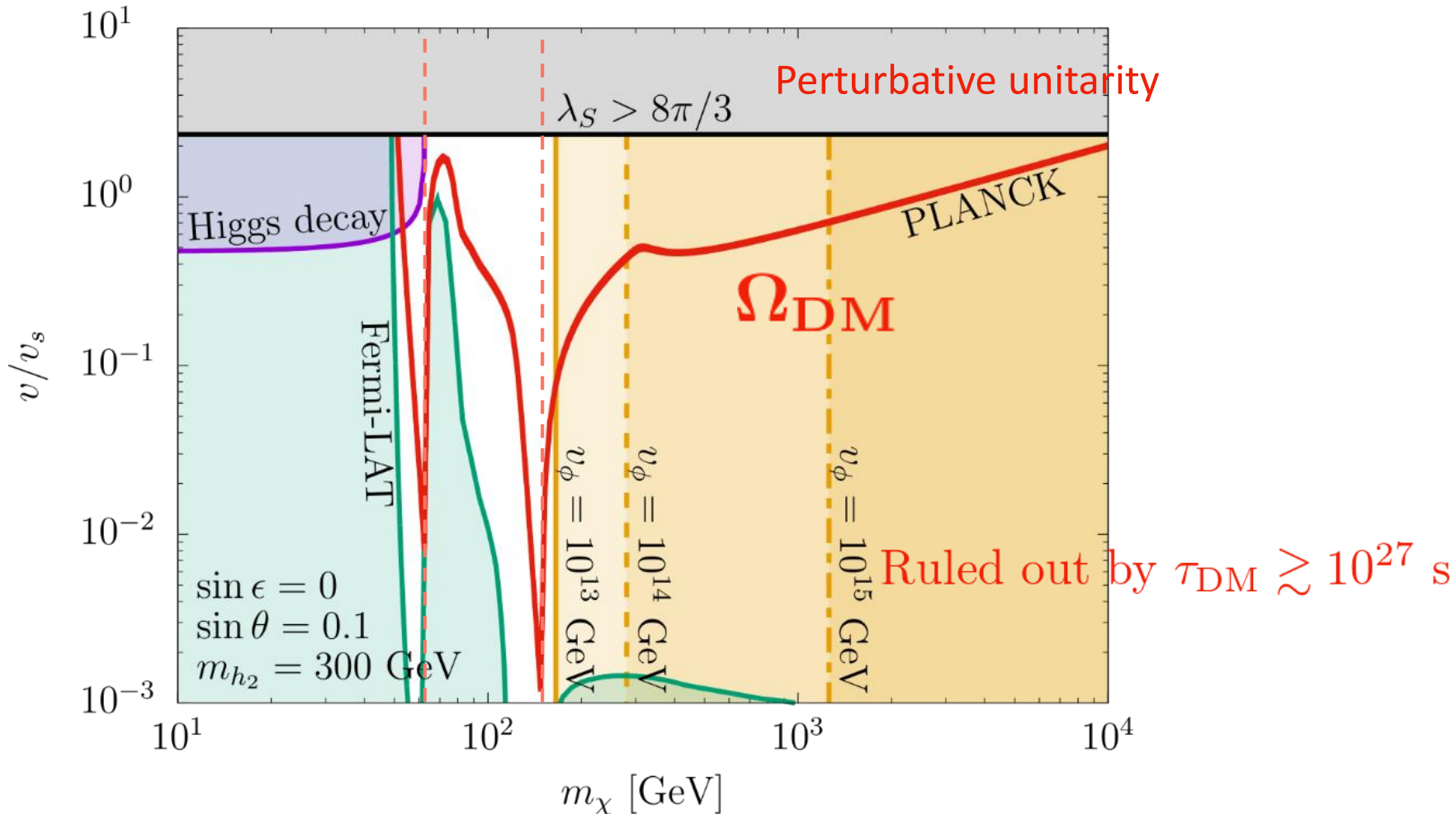
Allowed region in the (m_χ, v_ϕ) plane

$$m_{h_2} = 300 \text{ GeV}, \quad m_{Z'} = 10^{14} \text{ GeV}$$



Allowed region in the $(m_\chi, v/v_s)$ plane

$$m_{h_2} = 300 \text{ GeV}, \quad \sin \epsilon = 0$$



まとめ

- Gauged $U(1)_{B-L}$ 模型から導かれる pNGB 暗黒物質のシナリオを調べた。
- この暗黒物質は崩壊しうるが、十分に長寿命で暗黒物質として振る舞うことを示した。
- 制限の範囲内で、暗黒物質の残存量を説明する領域があることを示した。
- この模型は宇宙線観測の将来実験で探索されうる。
e.g. CTA, LHAASO

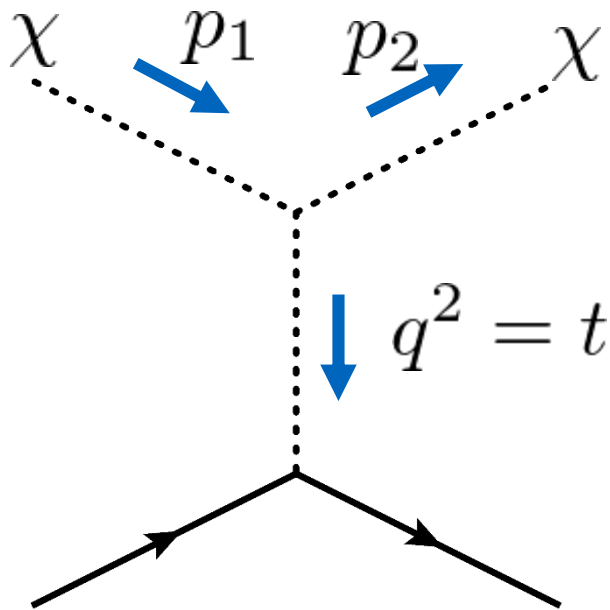
Back Up

(擬)南部-ゴールドストーンボソンの相互作用の性質

- Toy model $S = \frac{v_s + s}{\sqrt{2}} e^{i\chi/v_s}$ 非線形表現をとる

$$\mathcal{L} \supset |\partial_\mu S|^2 + |\partial_\mu H|^2 - \lambda_{HS} |H|^2 |S|^2 - \frac{m^2}{4} (S^2 + S^{*2})$$

$$\sim \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\phi}{v_s} \right)^2 \left((\partial_\mu \chi)^2 - m^2 \chi^2 \right) - \lambda_{HS} v_s s |H|^2$$



$$i\mathcal{M} \supset \lambda_{HS} \frac{((-ip_1) \cdot (ip_2) - m^2)}{t - m_s^2}$$

$$\sim \lambda_{HS} \frac{t}{t - m_s^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{M} = 0$$

擬南部-ゴールドストーン暗黒物質

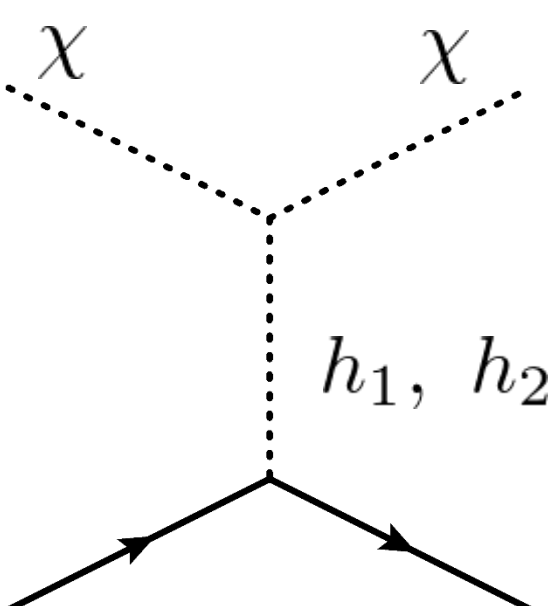
[Gross-Lebedev-Toma (2017),...]

- PNGB暗黒物質模型

SM + SM singlet scalar S

$$V(H, S) = -\frac{\mu_H^2}{2}|H|^2 - \frac{\mu_S^2}{2}|S|^2 + \frac{\lambda_H}{2}|H|^4 + \frac{\lambda_S}{2}|S|^4 + \lambda_{HS}|H|^2|S|^2 - \frac{m^2}{4}(S^2 + S^{*2})$$

Soft breaking term \Rightarrow 暗黒物質の質量


$$\kappa_{h_1\chi\chi} = -\frac{m_{h_1}^2 \sin\theta}{v_s}, \quad \kappa_{h_2\chi\chi} = +\frac{m_{h_2}^2 \cos\theta}{v_s}$$

散乱振幅

$$i\mathcal{M} \propto \frac{\sin\theta \cos\theta}{v_s} \left(-\frac{m_{h_1}^2}{q^2 - m_{h_1}^2} + \frac{m_{h_2}^2}{q^2 - m_{h_2}^2} \right)$$
$$\sim -\frac{\sin\theta \cos\theta}{v_s} \frac{q^2(m_{h_1}^2 - m_{h_2}^2)}{m_{h_1}^2 m_{h_2}^2} \rightarrow 0$$

ゲージ化された $U(1)_{B-L}$ 模型

	Q_L	u_R^c	d_R^c	L	e_R^c	H	ν_R^c	S	Φ
$SU(3)_c$	3	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	1	1	1	1	1	1
$SU(2)_L$	2	1	1	2	1	2	1	1	1
$U(1)_Y$	+1/6	-2/3	+1/3	-1/2	+1	+1/2	0	0	0
$U(1)_{B-L}$	+1/3	-1/3	-1/3	-1	+1	0	+1	+1	+2

- Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & |D_\mu S|^2 + |D_\mu \Phi|^2 + i\overline{\nu_{Ri}} \not{D} \nu_{Ri} - \frac{1}{4} X_{\mu\nu} X^{\mu\nu} - \frac{\sin \epsilon}{2} X_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ & - (y_\nu)_{ij} \tilde{H}^\dagger \overline{\nu_{Ri}} L_j - \frac{(y_\Phi)_{ij}}{2} \Phi \overline{\nu_{Ri}^c} \nu_{Rj} + \text{h.c.} \\ & + \mathcal{L}_{\text{SM,kin.}} + \mathcal{L}_{\text{SM,yukawa}} - V(H, S, \Phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(H, S, \Phi) = & -\frac{\mu_H^2}{2} |H|^2 - \frac{\mu_S^2}{2} |S|^2 - \frac{\mu_\Phi^2}{2} |\Phi|^2 + \frac{\lambda_H}{2} |H|^4 + \frac{\lambda_S}{2} |S|^4 + \frac{\lambda_\Phi}{2} |\Phi|^4 \\ & + \lambda_{HS} |H|^2 |S|^2 + \lambda_{H\Phi} |H|^2 |\Phi|^2 + \lambda_{S\Phi} |S|^2 |\Phi|^2 - \left(\frac{\mu_c}{\sqrt{2}} \Phi^* S^2 + \text{c.c.} \right) \end{aligned}$$

$$D_\mu = D_\mu^{\text{SM}} + ig_{B-L} X_\mu \quad X_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu$$

ゲージ化された $U(1)_{B-L}$ 模型

- スカラーポテンシャル

$$V(H, S, \Phi) = -\frac{\mu_H^2}{2}|H|^2 - \frac{\mu_S^2}{2}|S|^2 - \frac{\mu_\Phi^2}{2}|\Phi|^2 + \frac{\lambda_H}{2}|H|^4 + \frac{\lambda_S}{2}|S|^4 + \frac{\lambda_\Phi}{2}|\Phi|^4 \\ + \lambda_{HS}|H|^2|S|^2 + \lambda_{H\Phi}|H|^2|\Phi|^2 + \lambda_{S\Phi}|S|^2|\Phi|^2 - \left(\frac{\mu_c}{\sqrt{2}}\Phi^* S^2 + \text{c.c.} \right)$$

- パラメトリゼーション

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ (v+h)/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad S = \frac{v_s + s + i\eta_s}{\sqrt{2}}, \quad \Phi = \frac{v_\phi + \phi + i\eta_\phi}{\sqrt{2}}$$

- Type-Iシーソー \Rightarrow VEV v_ϕ のスケールが定まる

$$v_\phi \sim 4.3 \times 10^{14} \text{ GeV} \left(\frac{y_\nu^2}{y_\Phi} \right) \gg v, v_s$$

重いスカラー ϕ とベクトルボソンの質量 $\sim v_\phi$

ゲージ化された $U(1)_{B-L}$ 模型

- スカラーポテンシャル

$$V(H, S, \Phi) = -\frac{\mu_H^2}{2}|H|^2 - \frac{\mu_S^2}{2}|S|^2 - \frac{\mu_\Phi^2}{2}|\Phi|^2 + \frac{\lambda_H}{2}|H|^4 + \frac{\lambda_S}{2}|S|^4 + \frac{\lambda_\Phi}{2}|\Phi|^4 \\ + \lambda_{HS}|H|^2|S|^2 + \lambda_{H\Phi}|H|^2|\Phi|^2 + \lambda_{S\Phi}|S|^2|\Phi|^2 - \left(\frac{\mu_c}{\sqrt{2}}\Phi^* S^2 + \text{c.c.} \right)$$

対称性の破れ

- スカラーポテンシャル $V(H, S, \Phi)$ の対称性

$$U(1)_S \times U(1)_\Phi \xrightarrow{\mu_c \Phi^* S^2} U(1)_{B-L}$$

もし $\mu_c \rightarrow 0$ なら、NGBが2つ

- 対称性の破れ

~~$U(1)_{B-L}$~~

- NGB \rightarrow ゲージ場に食べられる
- pNGB $\rightarrow \text{mass}^2 \propto \mu_c$

ゲージ化された $U(1)_{B-L}$ 模型

- 対称性の破れのパターン

$$\begin{aligned}
 SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_S \times U(1)_\Phi &\xrightarrow{\mu_c \Phi^* S^2} SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_{B-L} \\
 &\xrightarrow[\langle H \rangle, \langle S \rangle, \langle \Phi \rangle]{\text{SSB}} U(1)_{\text{em}}
 \end{aligned}$$

- SSB**で(実)4自由度分の**NGB**が現れる → ゲージ場に食べられる

$$W^\pm, Z, Z'$$

- $\mu_c \Phi^* S^2$ によってexplicitに $U(1)_S \times U(1)_\Phi \rightarrow U(1)_{B-L}$
 → $mass^2 \propto \mu_c$ という **pNGB** が現れる。

$$H = \begin{pmatrix} w^+ \\ (v + h + iz)/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad S = \frac{v_s + s + i\eta_s}{\sqrt{2}}, \quad \Phi = \frac{v_\phi + \phi + i\eta_\phi}{\sqrt{2}}$$

ゲージ化された $U(1)_{B-L}$ 模型

- 質量固有値

$$\tan 2\theta \approx \frac{2vv_s(\lambda_{HS}\lambda_\Phi - \lambda_{H\Phi}\lambda_{S\Phi})}{v^2(\lambda_{H\Phi}^2 - \lambda_H\lambda_\Phi) - v_s^2(\lambda_{S\Phi}^2 - \lambda_S\lambda_\Phi)}$$

SM-like Higgs boson

- CP-even scalars

$$\begin{pmatrix} h \\ s \\ \phi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\lambda_{H\Phi}v}{\lambda_\Phi v_\phi} \\ 0 & 1 & \frac{\lambda_{S\Phi}v_s}{\lambda_\Phi v_\phi} \\ -\frac{\lambda_{H\Phi}v}{\lambda_\Phi v_\phi} & -\frac{\lambda_{S\Phi}v_s}{\lambda_\Phi v_\phi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$m_{h_1}^2 \approx \lambda_H v^2 - \frac{\lambda_{H\Phi}^2 \lambda_S - 2\lambda_{HS}\lambda_{H\Phi}\lambda_{S\Phi} + \lambda_\Phi \lambda_{HS}^2}{\lambda_{S\Phi} - \lambda_{S\Phi}^2} v^2, \quad \leftarrow 125 \text{ GeV}$$

$$m_{h_2}^2 \approx \frac{\lambda_S \lambda_\Phi - \lambda_{S\Phi}^2}{\lambda_\Phi} v_s^2 + \frac{(\lambda_\Phi \lambda_{HS} - \lambda_{H\Phi} \lambda_{S\Phi})^2}{\lambda_\Phi (\lambda_S \lambda_\Phi - \lambda_{S\Phi}^2)} v^2, \quad m_{h_3}^2 \approx \lambda_\Phi v_\phi^2$$

- CP-odd scalars

pNGB (dark matter)

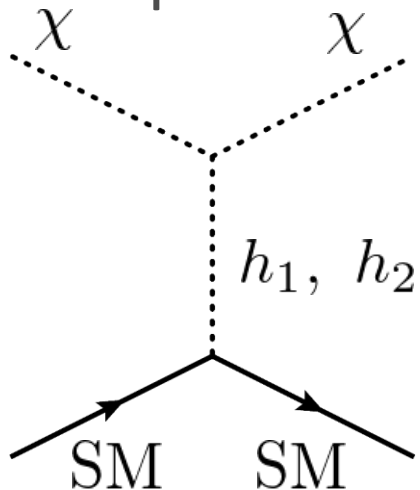
$$\begin{pmatrix} \eta_s \\ \eta_\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{(v_s^2 + 4v_\phi^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 2v_\phi & v_s \\ -v_s & 2v_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

$$m_\chi^2 = \frac{\mu_c(v_s^2 + 4v_\phi^2)}{4v_\phi}$$

X_μ に食べられる

ゲージ化された $U(1)_{B-L}$ モデルとpNGB暗黒物質

- Amplitude for DM + SM \rightarrow DM + SM



$$\kappa_{\chi\chi h_1} \approx -\frac{m_{h_1}^2 \sin \theta}{v_s}, \quad \kappa_{\chi\chi h_2} \approx +\frac{m_{h_2}^2 \cos \theta}{v_s},$$

$$\kappa_{\chi\chi h_3} \approx +\frac{m_{h_3}^2}{v_s} \frac{\lambda_{S\Phi} v_s}{\lambda_{\Phi} v_{\phi}}$$

$$i\mathcal{M} \propto \frac{\sin \theta \cos \theta}{v_s} \left(-\frac{m_{h_1}^2}{q^2 - m_{h_1}^2} + \frac{m_{h_2}^2}{q^2 - m_{h_2}^2} \right) + \mathcal{O}(1/v_{\phi})$$

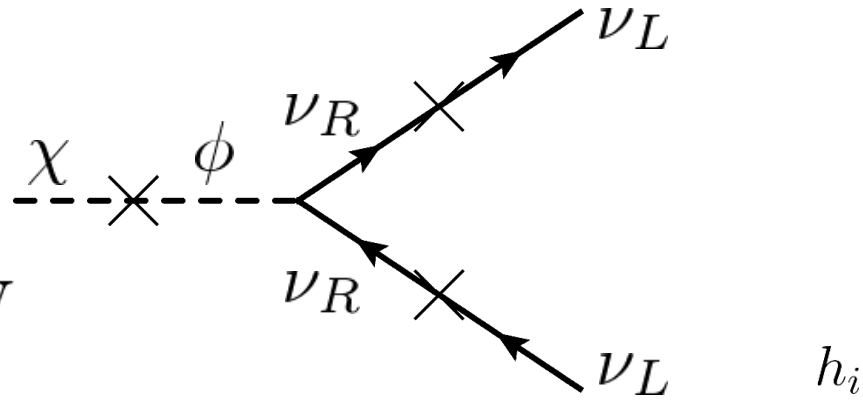
散乱振幅は $\mathcal{O}(1/v_{\phi})$ でもととのpNGB暗黒物質と同じ機構で抑制されている。

長寿命暗黒物質

2体崩壊

- $\chi \rightarrow \nu\nu$

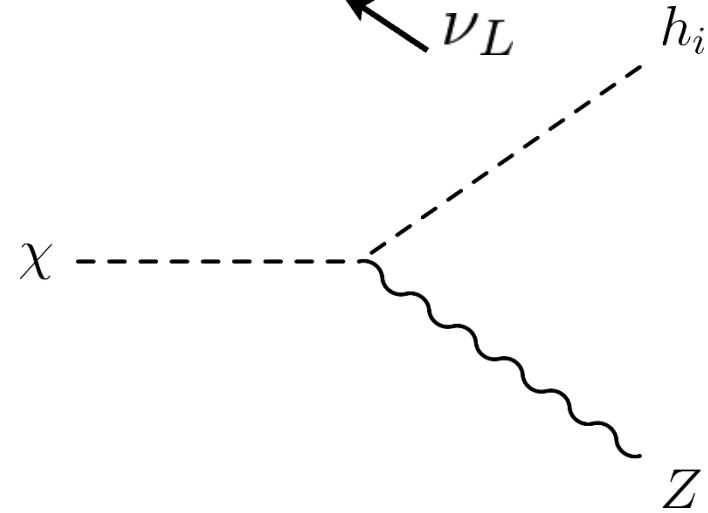
$$\Gamma_{\chi \rightarrow \nu\nu} \lesssim 10^{-67} \text{ GeV}$$



- $\chi \rightarrow h_i Z$

$$\Gamma_{2\text{-body}} \approx \frac{g_{B-L}^2}{16\pi m_{Z'}^4} m_Z^2 m_\chi^3 \sin^2 \theta_W \sin^2 \epsilon$$

$$= 5.8 \times 10^{-52} \text{ GeV} \left(\frac{m_\chi}{0.5 \text{ TeV}} \right)^3 \left(\frac{10^{15} \text{ GeV}}{m_{Z'}} \right)^2 \left(\frac{10^{15} \text{ GeV}}{v_\phi} \right)^2 \left(\frac{\sin \epsilon}{1/\sqrt{2}} \right)^2$$

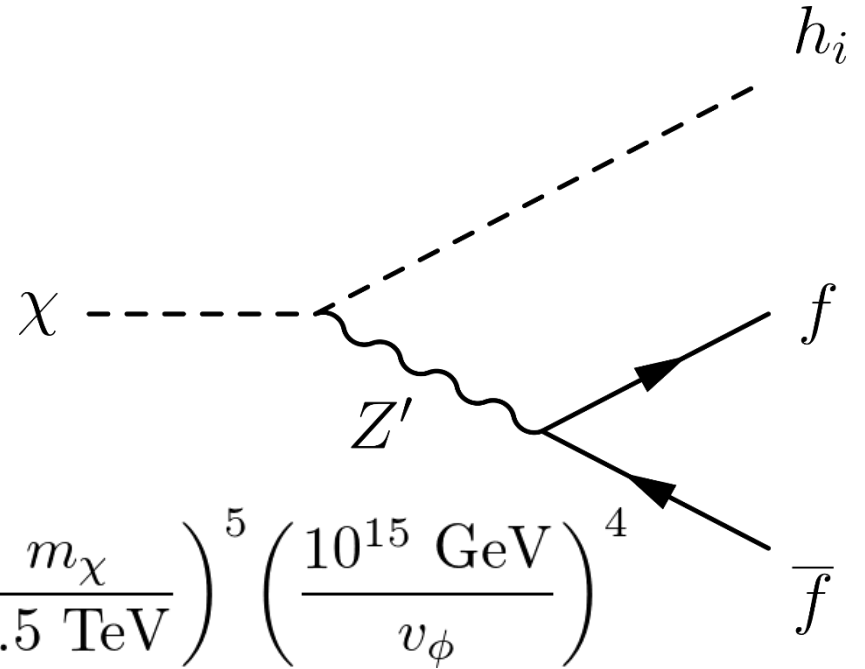


$\chi \rightarrow h_i \gamma$ の反応はヘリシティ保存から禁止

長寿命暗黒物質

3体崩壊

- $\chi \rightarrow h_i f \bar{f}$



$$\Gamma_{3\text{-body}} \Big|_{\sin \epsilon \rightarrow 0} \approx \frac{13}{16} \frac{g_{B-L}^4}{1536\pi^3} \frac{m_\chi^5}{m_{Z'}^4}$$

$$\approx \boxed{5.3 \times 10^{-52} \text{ GeV}} \left(\frac{m_\chi}{0.5 \text{ TeV}} \right)^5 \left(\frac{10^{15} \text{ GeV}}{v_\phi} \right)^4$$

$$\Gamma_{3\text{-body}} \Big|_{\sin \epsilon \rightarrow 1/\sqrt{2}} \approx \frac{g_{B-L}^2}{768\pi^3} \frac{m_\chi^5}{m_{Z'}^4} (10g_1^2 - 8\sqrt{2}g_1g_{B-L} + 26g_{B-L}^2)$$

$$\approx \boxed{4.1 \times 10^{-52} \text{ GeV}} \left(\frac{m_\chi}{0.5 \text{ TeV}} \right)^5 \left(\frac{10^{15} \text{ GeV}}{m_{Z'}} \right)^2 \left(\frac{10^{15} \text{ GeV}}{v_\phi} \right)^2$$

$$\times \left[1 - \frac{2\sqrt{2}}{5} \frac{m_{Z'}}{g_1 v_\phi} + \frac{13}{20} \frac{m_{Z'}^2}{g_1^2 v_\phi^2} \right]$$

数值计算

数值解析

- Parameter sets

$$m_{h_2} = 300 \text{ or } 1000 \text{ GeV}, \quad m_{h_3} = 10^{13} \text{ GeV},$$

$$\sin \theta = 0.1, \quad \lambda_{H\Phi} = \lambda_{S\Phi} = 10^{-6}$$

$$m_{Z'} = 10^{14} \text{ or } 10^{15} \text{ GeV},$$

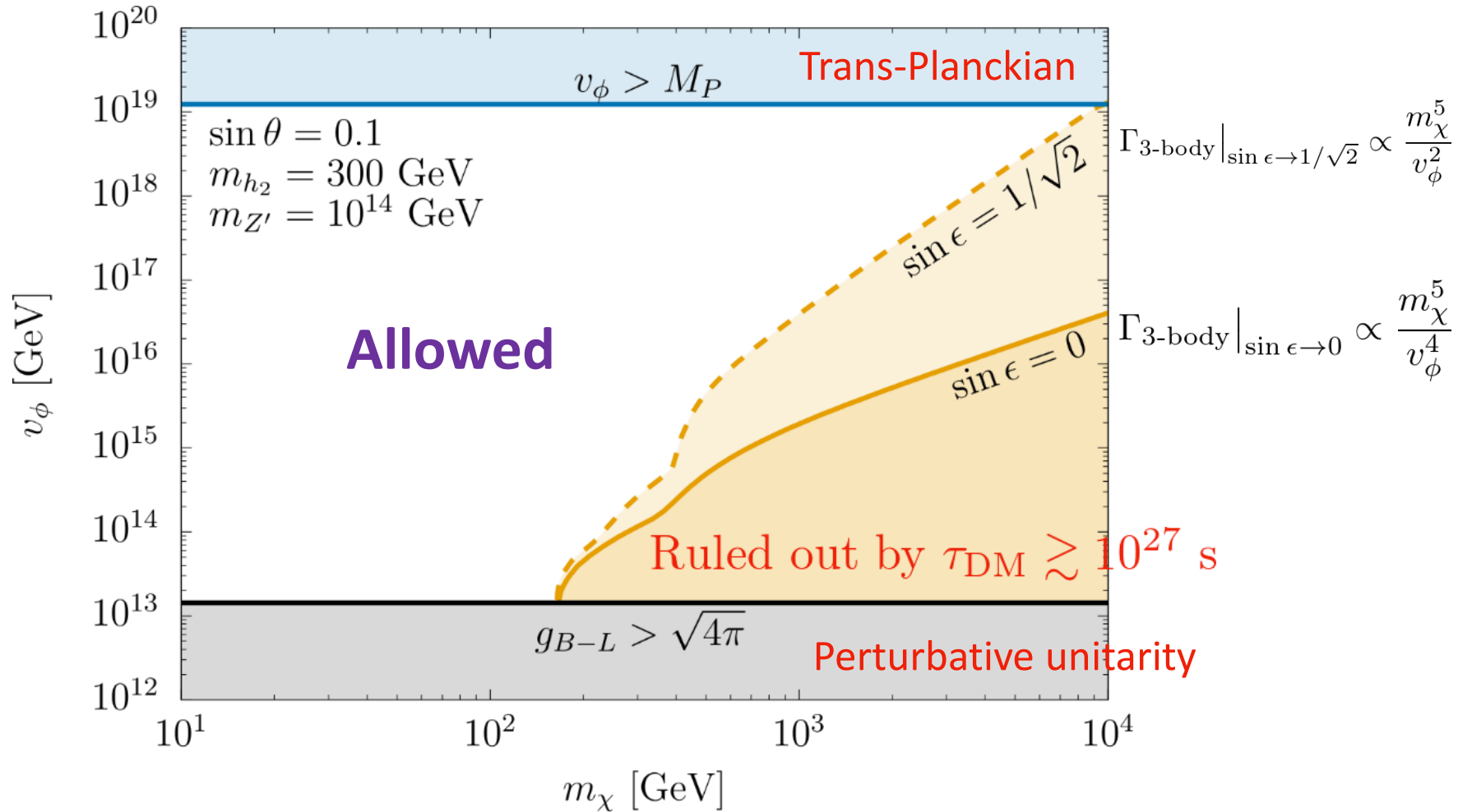
$$\sin \epsilon = 0 \text{ or } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゲージカップリングと4点結合は次で固定：

$$g_{B-L}^2 \approx \frac{m_{Z'}^2}{4v_\phi^2}, \quad \lambda_\Phi \approx \frac{m_{h_3}^2}{v_\phi^2}$$

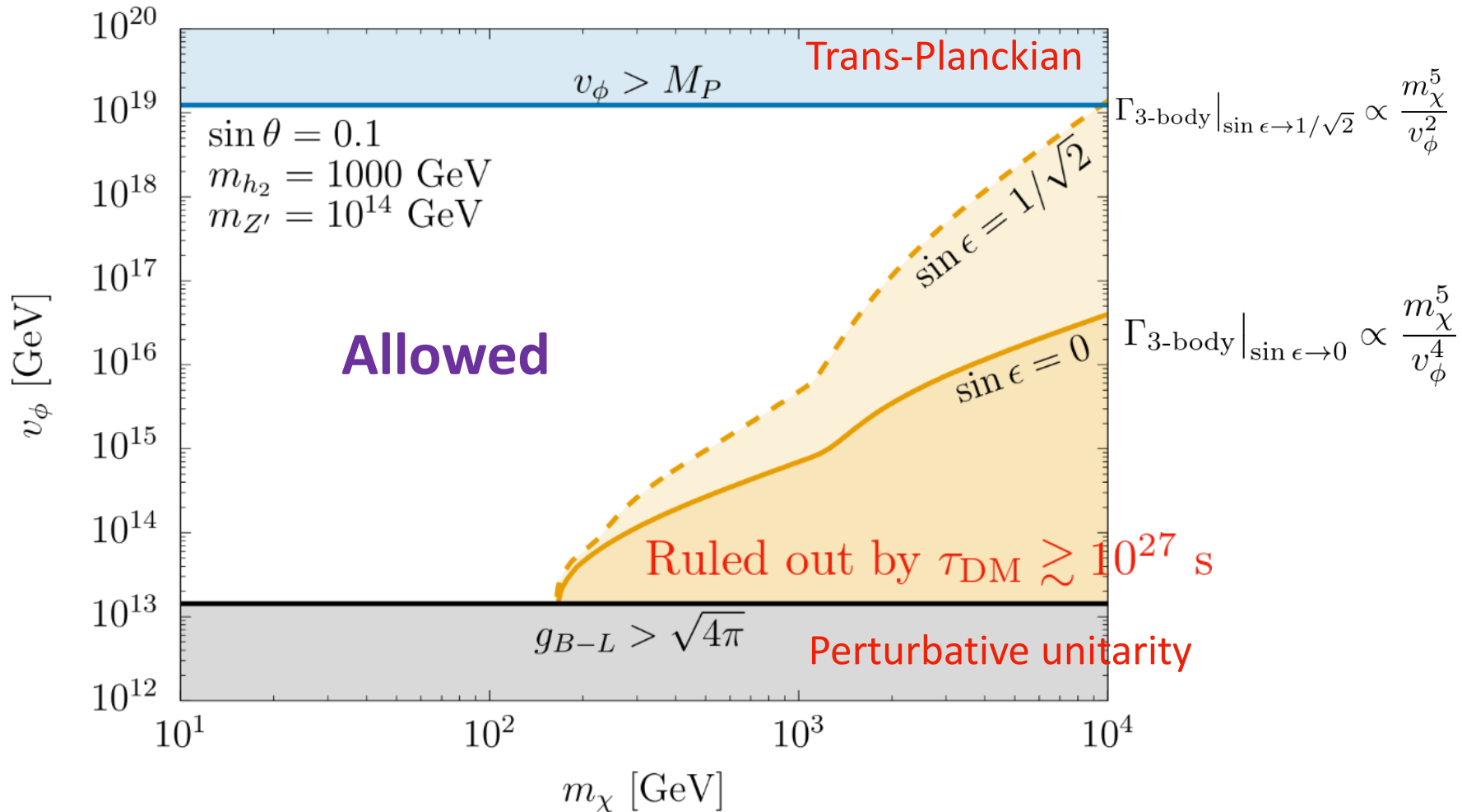
Allowed region in the (m_χ, v_ϕ) plane

$$m_{h_2} = 300 \text{ GeV}, \quad m_{Z'} = 10^{14} \text{ GeV}$$



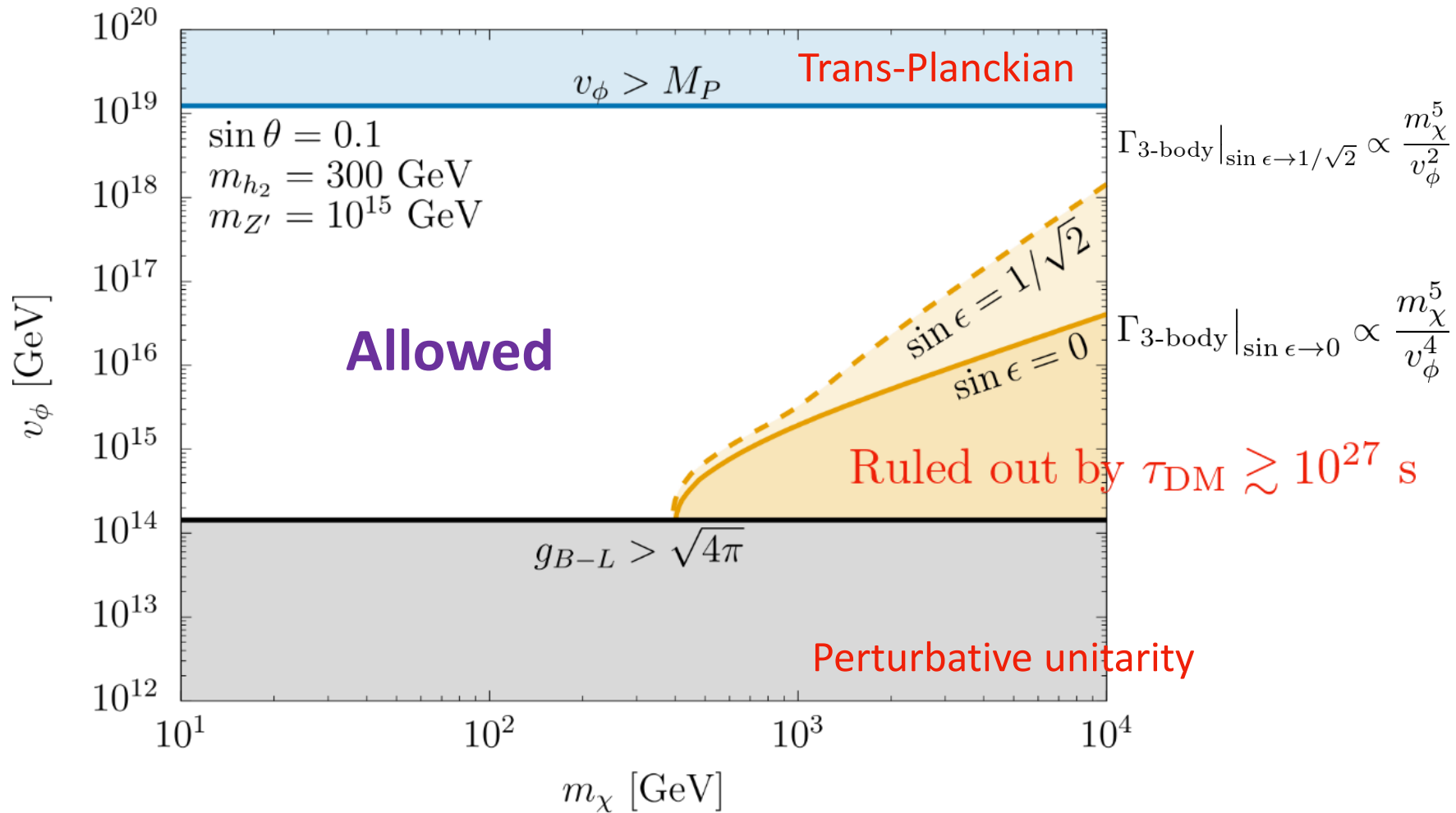
Allowed region in the (m_χ, v_ϕ) plane

$$m_{h_2} = 1000 \text{ GeV}, \quad m_{Z'} = 10^{14} \text{ GeV}$$



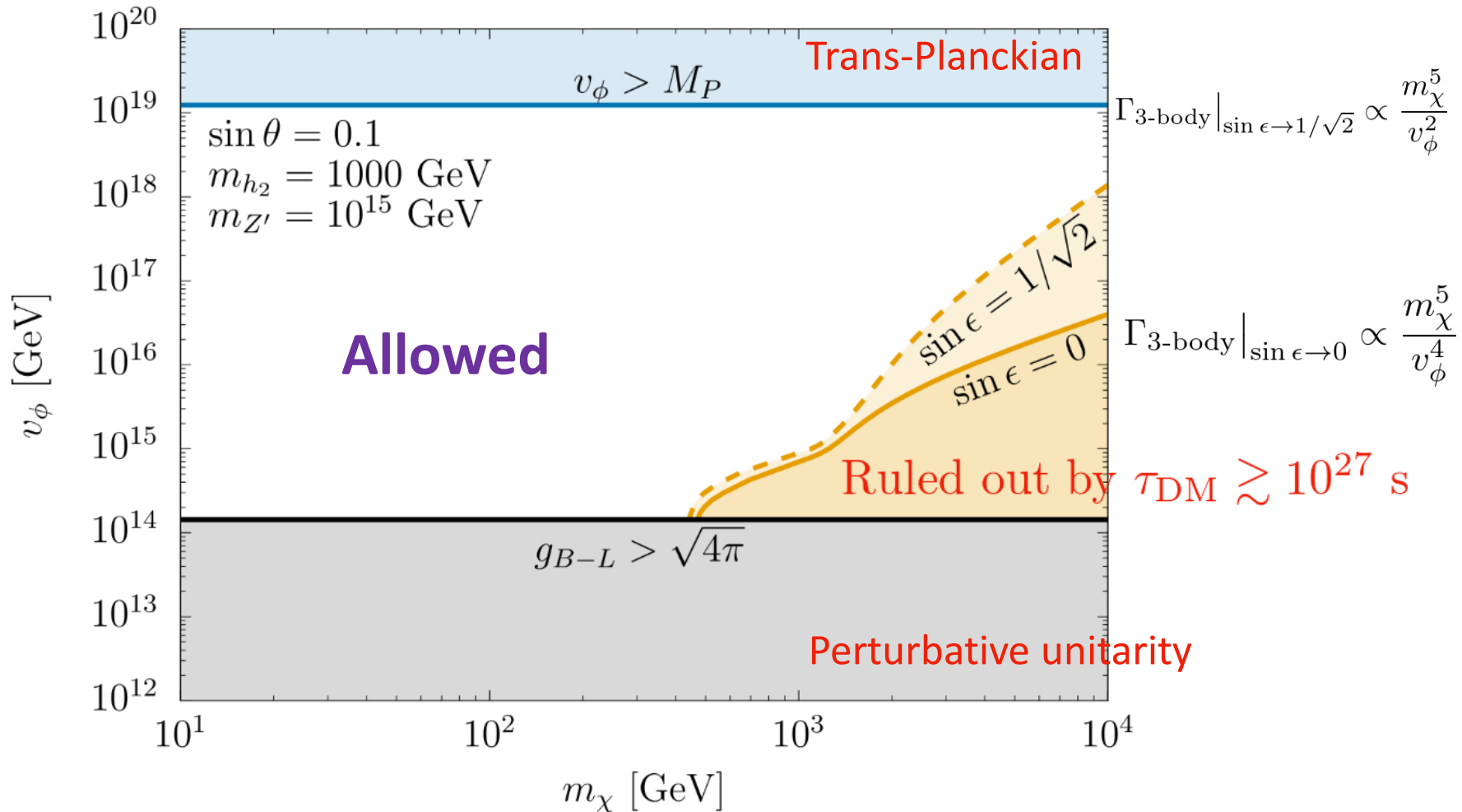
Allowed region in the (m_χ, v_ϕ) plane

$$m_{h_2} = 300 \text{ GeV}, \quad m_{Z'} = 10^{15} \text{ GeV}$$



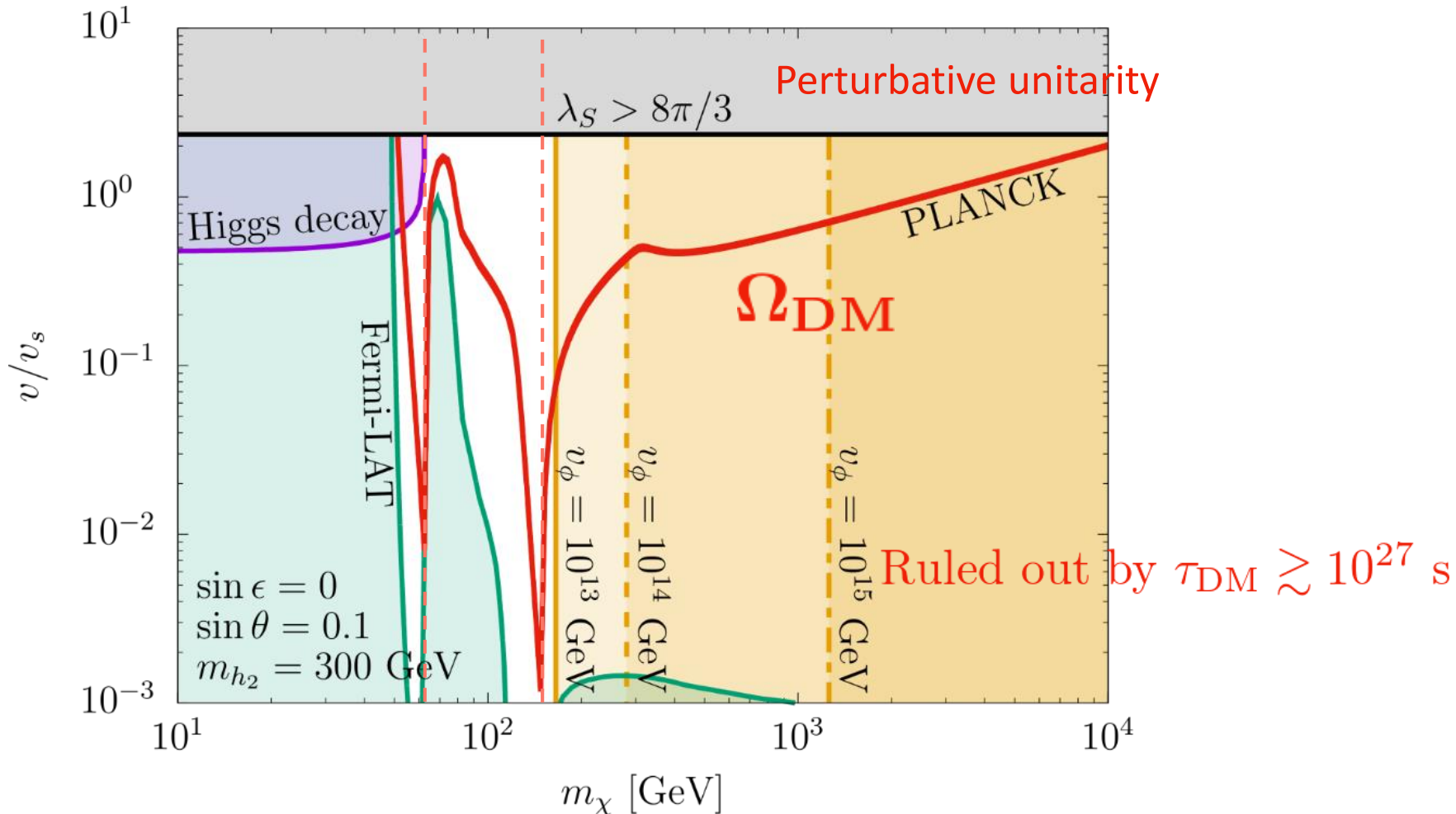
Allowed region in the (m_χ, v_ϕ) plane

$$m_{h_2} = 1000 \text{ GeV}, \quad m_{Z'} = 10^{15} \text{ GeV}$$



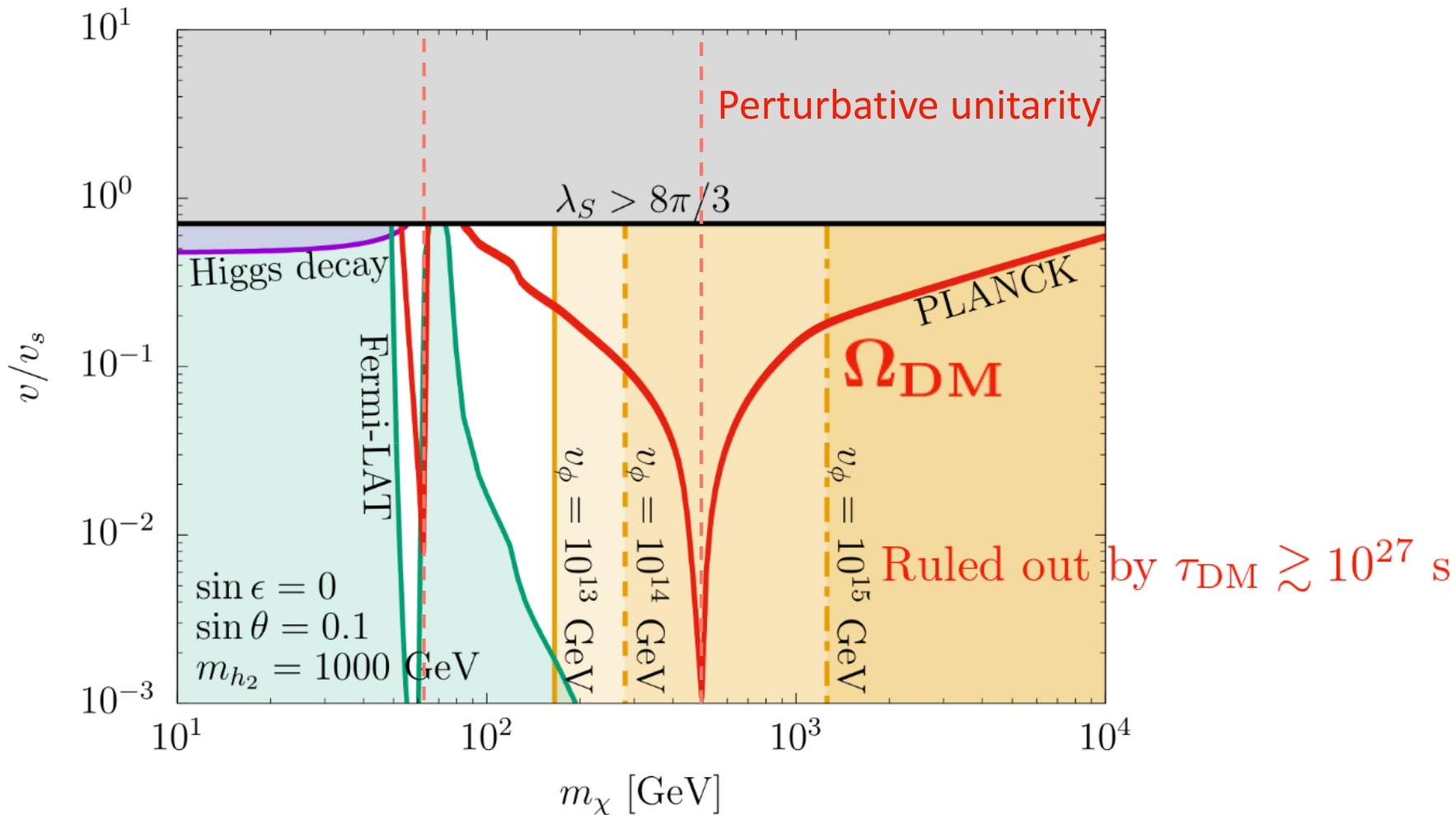
Allowed region in the $(m_\chi, v/v_s)$ plane

$$m_{h_2} = 300 \text{ GeV}, \quad \sin \epsilon = 0$$



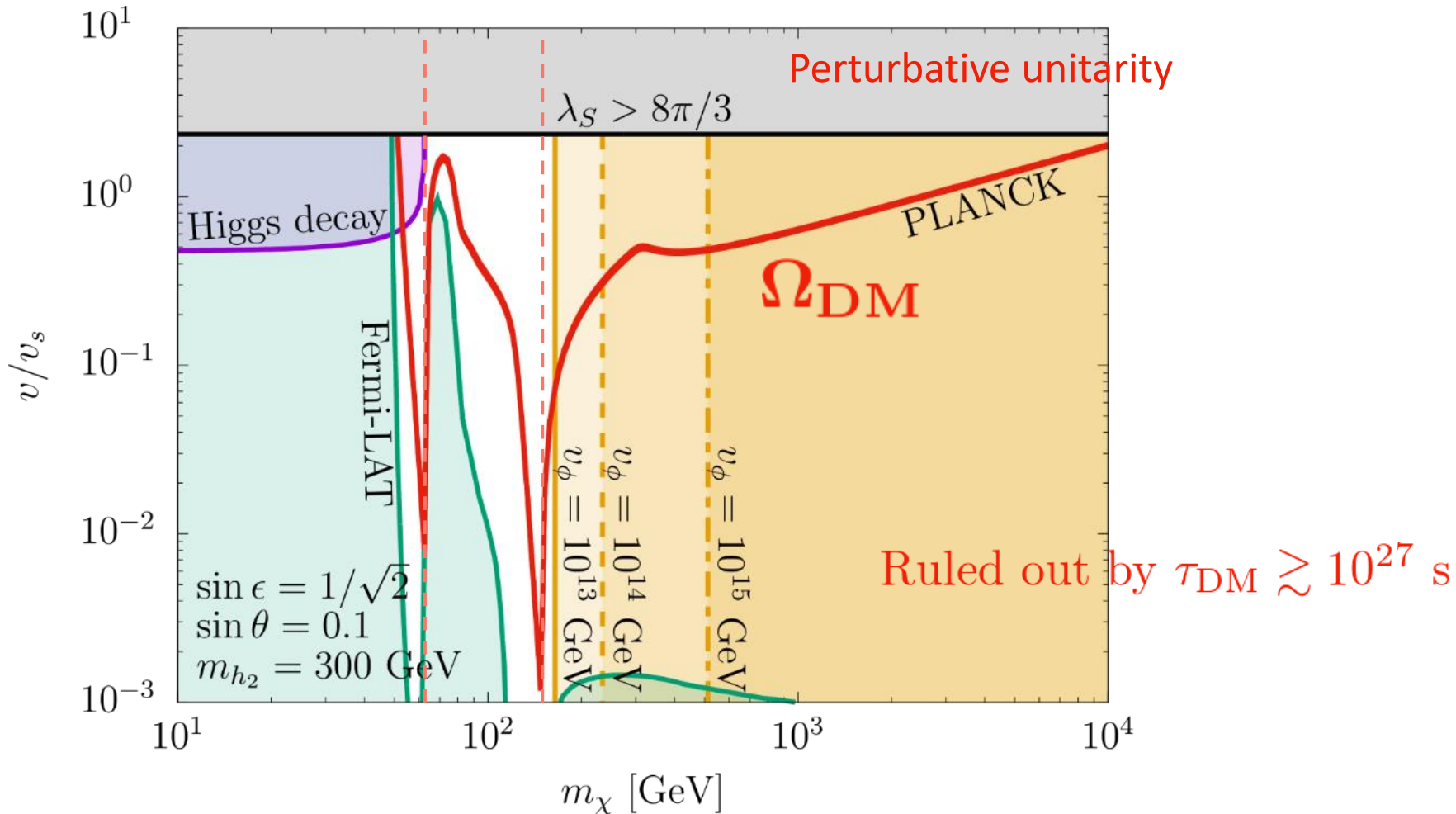
Allowed region in the $(m_\chi, v/v_s)$ plane

$$m_{h_2} = 1000 \text{ GeV}, \quad \sin \epsilon = 0$$



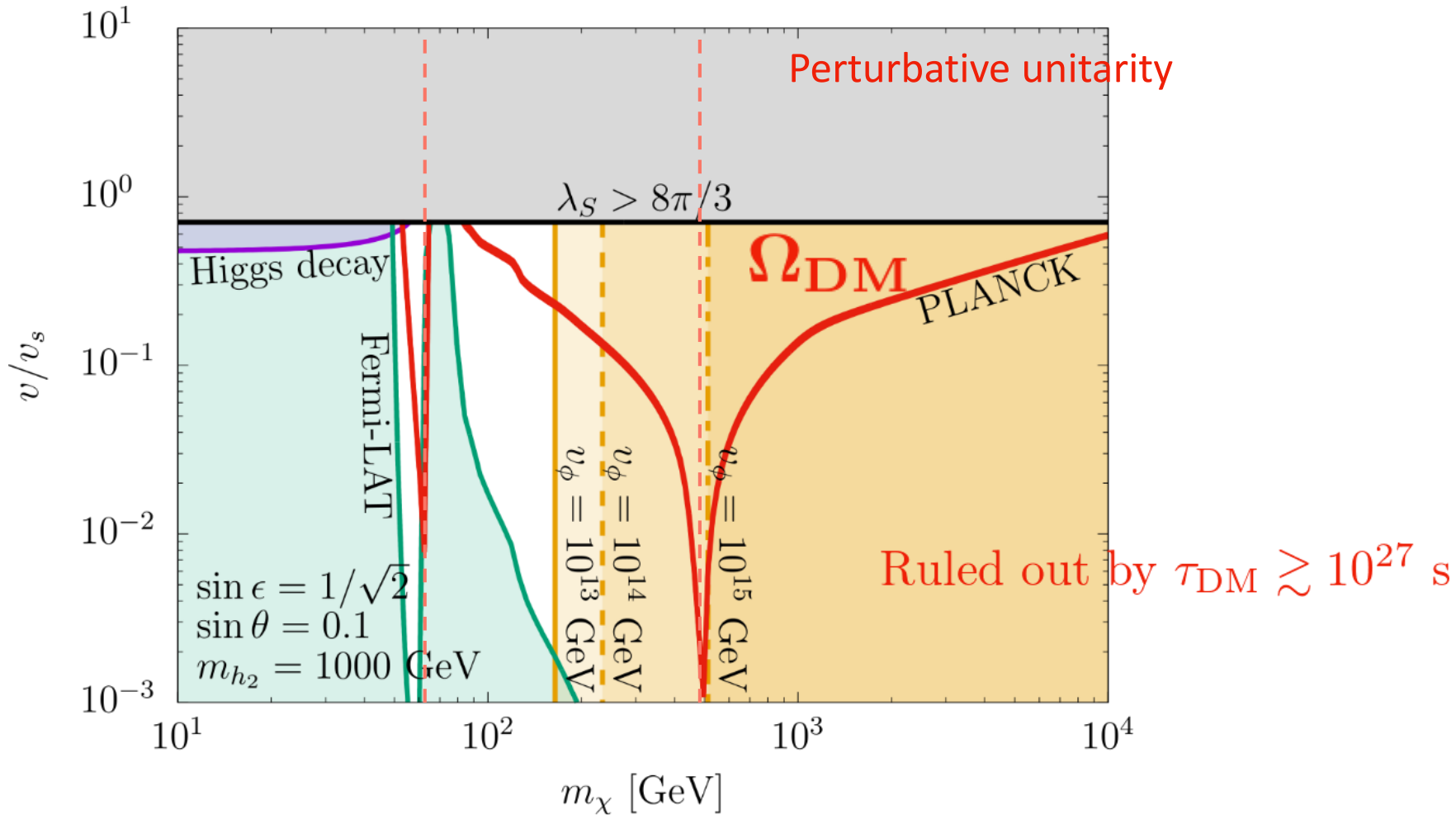
Allowed region in the $(m_\chi, v/v_s)$ plane

$$m_{h_2} = 300 \text{ GeV}, \quad \sin \epsilon = 1/\sqrt{2}$$



Allowed region in the $(m_\chi, v/v_s)$ plane

$$m_{h_2} = 1000 \text{ GeV}, \quad \sin \epsilon = 1/\sqrt{2}$$



Boltzmann方程式

- 暗黒物質のBoltzmann方程式

$$Y_\chi(x) = n_\chi/s, \quad x = m_\chi/T$$

$$\frac{dY_\chi(x)}{dx} = -\frac{\langle\sigma v\rangle}{x^2} \frac{s(m_\chi)}{H(m_\chi)} (Y_\chi(x)^2 - Y_\chi^{\text{eq}}(x)^2)$$

$$s(T) = \frac{2\pi^2}{45} g_*^S T^3, \quad H(T) = \sqrt{\frac{4\pi^3}{45} g_*} \frac{T^2}{M_P}$$

$$Y_\chi^{\text{eq}} = n_\chi^{\text{eq}}/s, \quad n_\chi^{\text{eq}} = \frac{m_\chi^2 T^2}{2\pi^2} K_2(m_\chi/T)$$

$$\langle\sigma v\rangle = \frac{1}{n_\chi^{\text{eq}2}} \frac{1}{2^5 \pi^4} \left(\frac{m_\chi}{x}\right) \int_{4m_\chi^2}^{\infty} ds (s - 4m_\chi^2) \sqrt{s} K_1(x\sqrt{s}/m_\chi) \sigma(s)$$

σ :暗黒物質の全消滅散乱断面積

Gauge kinetic mixing

$SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_{B-L}$ gauge group

- Kinetic term

$$\mathcal{L}_{GK} = -\frac{1}{2} \text{tr} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} X_{\mu\nu} X^{\mu\nu} - \frac{\sin \epsilon}{2} B_{\mu\nu} X^{\mu\nu}$$

- Mass term

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & W_\mu^3 X_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta_W m_{\tilde{Z}}^2 & -\sin \theta_W \cos \theta_W m_{\tilde{Z}}^2 & 0 \\ -\sin \theta_W \cos \theta_W m_{\tilde{Z}}^2 & \cos^2 \theta_W m_{\tilde{Z}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_X^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \\ X^\mu \end{pmatrix}$$

$$\sin \theta_W \equiv \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \cos \theta_W \equiv \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}},$$

$$m_{\tilde{Z}}^2 \equiv \frac{g_1^2 + g_2^2}{4} v^2, \quad m_X^2 \equiv g_{B-L}^2 (v_s^2 + 4v_\phi^2)$$

Gauge kinetic mixing

$SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_{B-L}$ gauge group

- Mixing

$$\tilde{V}_{GK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\tan \epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\cos \epsilon \end{pmatrix}, \quad \tan 2\zeta = \frac{-m_{\tilde{Z}}^2 \sin_W \sin 2\epsilon}{m_X^2 - m_{\tilde{Z}}^2 (\cos^2 \epsilon - \sin^2 \theta_W \sin^2 \epsilon)}$$

$$U_G = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W & 0 \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \zeta & -\sin \zeta \\ 0 & \sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \\ X_\mu \end{pmatrix} = \tilde{V}_{GK} U_G \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \\ Z'_\mu \end{pmatrix}$$

- Mass eigenvalues

$$m_Z^2 = \frac{1}{2} \left[\overline{M}^2 - \sqrt{\overline{M}^4 - \frac{4m_{\tilde{Z}}^2 m_X^2}{\cos^2 \epsilon}} \right], \quad m_{Z'}^2 = \frac{1}{2} \left[\overline{M}^2 + \sqrt{\overline{M}^4 + \frac{4m_{\tilde{Z}}^2 m_X^2}{\cos^2 \epsilon}} \right]$$

$$\overline{M}^2 \equiv m_{\tilde{Z}}^2 (1 + \sin^2 \theta_W \tan^2 \epsilon) + m_X^2 / \cos^2 \epsilon$$