

核物質状態方程式に対する変分法を用いた 修正ウルカ過程のニュートリノ放射率

早稲田大学先進理工学部物理学科

鷹野正利

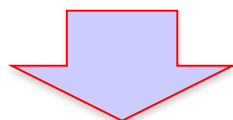
阿部雄太

九州大学理学研究院

富樫 甫

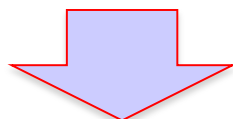
研究目的

現実的核力から出発した変分法による
超新星爆発計算用
核物質状態方程式 (Togashi EOS)



Nucl. Phys. A 961 (2017) 78

核子有効質量、核子間相関関数



修正URCA過程、核子制動放射での
ニュートリノ放出率への応用
(EOSとconsistentなニュートリノ放出率)

現実的核力から出発した変分法による 超新星爆発計算用核物質状態方程式*)

H. Togashi,¹⁾ K. Nakazato,²⁾ Y. Takehara,³⁾
S. Yamamuro,³⁾ H. Suzuki,³⁾ and M. Takano⁴⁾

1) 九州大理, 2) 九州大基幹教育院, 3) 東京理科大理工, 3) 早稲田大理工⁴⁾

An EOS table for supernova numerical simulations
constructed with the cluster variational method
based on the Argonne v18 two-body potential
and the Urbana IX three-body potential

APR-EOS

Grid point

Parameter	Minimum	Maximum	Mesh	Number
$\log_{10}(T)$ [MeV]	-1.00	2.60	0.04	91 + 1
Y_p	0.00	0.65	0.01	66
$\log_{10}(\rho_B)$ [g/cm ³]	5.1	16.0	0.10	110

*)H. Togashi et al., Nucl. Phys. A 961 (2017) 78.

核物質ハミルトニアン

$$H = H_2 + H_3$$

$$H_2 = -\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \sum_{i<j}^N V_{ij}, \quad H_3 = \sum_{i<j<k}^N V_{ijk}$$

V_{ij} : The AV18 potential (isoscalar), V_{ijk} : The UIX potential

The AV18 two-body potential

R. B. Wiringa et al., PRC **51** (1995) 38

$$V_{ij} = \sum_{t=0}^1 \sum_{s=0}^1 \left[V_{Cts}(r_{ij}) + V_{Tt}(r_{ij}) S_{Tij} + V_{SOt}(r_{ij}) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}_{ij}) \right. \\ \left. + V_{qLts}(r_{ij}) |\mathbf{L}_{ij}|^2 + V_{qSOt}(r_{ij}) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}_{ij})^2 \right] P_{tsij} + V_{\text{corr}}$$

中心力 テンソル力 スピン軌道力

L²乗項 2次のスピン軌道力

t : isospin, s : spin

2核子散乱実験データをよく再現する

Jastrow波動関数

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \text{Sym} \left[\prod_{i < j} f_{ij} \right] \Phi_F(x_1, \dots, x_N)$$

Φ_F : 絶対零度Fermi気体の波動関数 $\text{Sym}[]$: 対称化演算子

f_{ij} : 2核子間相関関数

$$f_{ij} = \sum_{t=0}^1 \sum_{\mu} \sum_{s=0}^1 [f_{Cts}^{\mu}(r_{ij}) + s f_{Tt}^{\mu}(r_{ij}) S_{Tij} + s f_{SOt}^{\mu}(r_{ij}) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}_{ij})] P_{tsij}^{\mu}$$

- f_{Cts}^{μ} : 中心力型相関関数 t : isospin
- f_{Tt}^{μ} : テンソル力型相関関数 s : spin
- f_{SOt}^{μ} : スピン軌道力型相関関数 $\mu = (+, 0, -)$
for (p-p, p-n, n-n) pairs ($t=1$)

P_{tsij}^{μ} : スピンアイソスピン射影演算子

クラスター変分法

Hamiltonian期待値

クラスター展開

$$\frac{\langle H_2 \rangle}{N} = \frac{1}{N} \frac{\langle \Psi | H_2 | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{\langle H_2 \rangle_2}{N} + \frac{\langle H_2 \rangle_3}{N} + \dots$$

2体クラスター近似

$\langle H_2 \rangle_2 / N$: 2体クラスター項

$\langle H_2 \rangle_3 / N$: 3体クラスター項

↑
↓
高次クラスター項を
系統的に取り込む
FHNC法 (APR, AM)

2体クラスター近似

$$\frac{E_2}{N} = \frac{\langle H_2 \rangle_2}{N} [f_{Cts}^\mu(r), f_{Tt}^\mu(r), f_{SOt}^\mu(r)]$$

$f_{Cts}^\mu(r), f_{Tt}^\mu(r), f_{SOt}^\mu(r)$ Euler-Lagrange 方程式

→ 最小化されたエネルギー

$\frac{\langle H_2 \rangle}{N}$ の2体クラスター近似

$$\frac{E_2}{N} = E_F(x) + 2\pi\rho \sum_{t=0}^1 \sum_{\mu} \sum_{s=0}^1 \int \left[F_{ts}^{\mu}(r)V_{Cts}(r) + sF_{Tr}^{\mu}(r)V_{Tr}(r) + sF_{SOt}^{\mu}(r)V_{SOt}(r) \right. \\ \left. + F_{qLts}^{\mu}(r)V_{qLts}(r) + sF_{qSOt}^{\mu}(r)V_{qSOt}(r) \right] r^2 dr \\ + \frac{2\pi\hbar^2\rho}{m} \sum_{t=0}^1 \sum_{\mu} \sum_{s=0}^1 \int \left[\left\{ \left[\frac{df_{Cts}^{\mu}(r)}{dr} \right]^2 + 8s \left[\frac{df_{Tr}^{\mu}(r)}{dr} \right]^2 + 48s \left[\frac{f_{Tr}^{\mu}(r)}{r} \right]^2 \right\} F_{Fts}^{\mu}(r) + \frac{2}{3}s \left[\frac{df_{SOt}^{\mu}(r)}{dr} \right]^2 F_{qFr}^{\mu}(r) \right] r^2 dr$$

$$F_{ts}^{\mu}(r) = [f_{Cts}^{\mu}(r)]^2 F_{Fts}^{\mu}(r) + 8s [f_{Tr}^{\mu}(r)]^2 F_{Fr1}^{\mu}(r) + \frac{2}{3}s [f_{SOt}^{\mu}(r)]^2 F_{qFr1}^{\mu}(r)$$

$$F_{Tr}^{\mu}(r) = 16 \left\{ f_{Cr1}^{\mu}(r) f_{Tr}^{\mu}(r) - [f_{Tr}^{\mu}(r)]^2 \right\} F_{Fr1}^{\mu}(r) - \frac{2}{3}s [f_{SOt}^{\mu}(r)]^2 F_{qFr1}^{\mu}(r)$$

$$F_{SOt}^{\mu}(r) = -24 [f_{Tr}^{\mu}(r)]^2 F_{Fr1}^{\mu}(r) + \frac{4}{3} \left\{ f_{Cr1}^{\mu}(r) - \frac{1}{4} f_{SOt}^{\mu}(r) - f_{Tr}^{\mu}(r) \right\} f_{SOt}^{\mu}(r) F_{qFr1}^{\mu}(r)$$

$$F_{qLts}^{\mu}(r) = [f_{Cts}^{\mu}(r)]^2 F_{qFts}^{\mu}(r) + 8s [f_{Tr}^{\mu}(r)]^2 [6F_{Fr1}^{\mu}(r) + F_{qFts}^{\mu}(r)] + \frac{2}{3}s [f_{SOt}^{\mu}(r)]^2 F_{bFr1}^{\mu}(r)$$

$$F_{qSOt}^{\mu}(r) = \frac{2}{3} [f_{Cr1}^{\mu}(r)]^2 F_{qFr1}^{\mu}(r) - \frac{2}{3} f_{Cr1}^{\mu}(r) [2f_{Tr}^{\mu}(r) + f_{SOt}^{\mu}(r)] F_{qFr1}^{\mu}(r)$$

$$+ 8s [f_{Tr}^{\mu}(r)]^2 \left[72F_{Fr1}^{\mu}(r) + \frac{20}{3} F_{qFr1}^{\mu}(r) \right] + \frac{8}{3} f_{Tr}^{\mu}(r) f_{SOt}^{\mu}(r) F_{qFr1}^{\mu}(r) + \frac{2}{3}s [f_{SOt}^{\mu}(r)]^2 F_{bFr1}^{\mu}(r)$$

変分計算における2つの拘束条件

1. Mayer条件 (規格化条件の一種)

$$4\pi\rho \int_0^\infty [F_{ts}^\mu(r) - F_{Fts}^\mu(r)] r^2 dr = 0$$

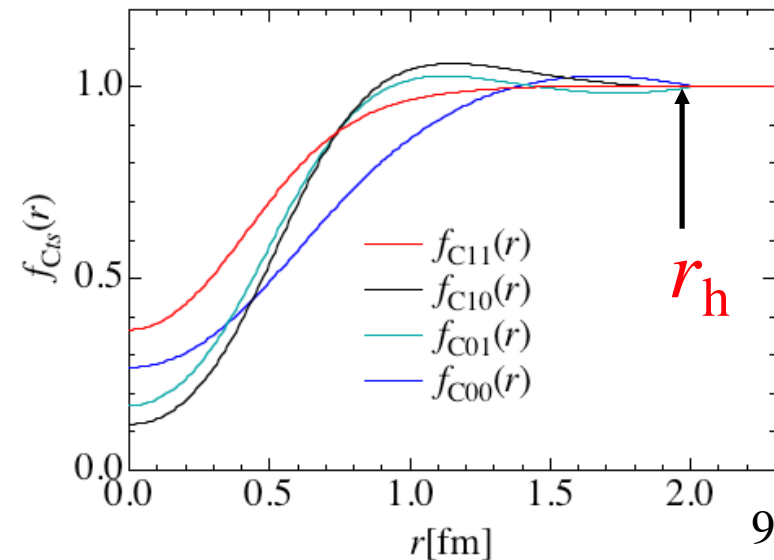
2. Healing distance: r_h

$$f_{Cts}^\mu(r) = 1, f_{Ti}^\mu(r) = 0, f_{Sot}^\mu(r) = 0 \quad (r > r_h)$$

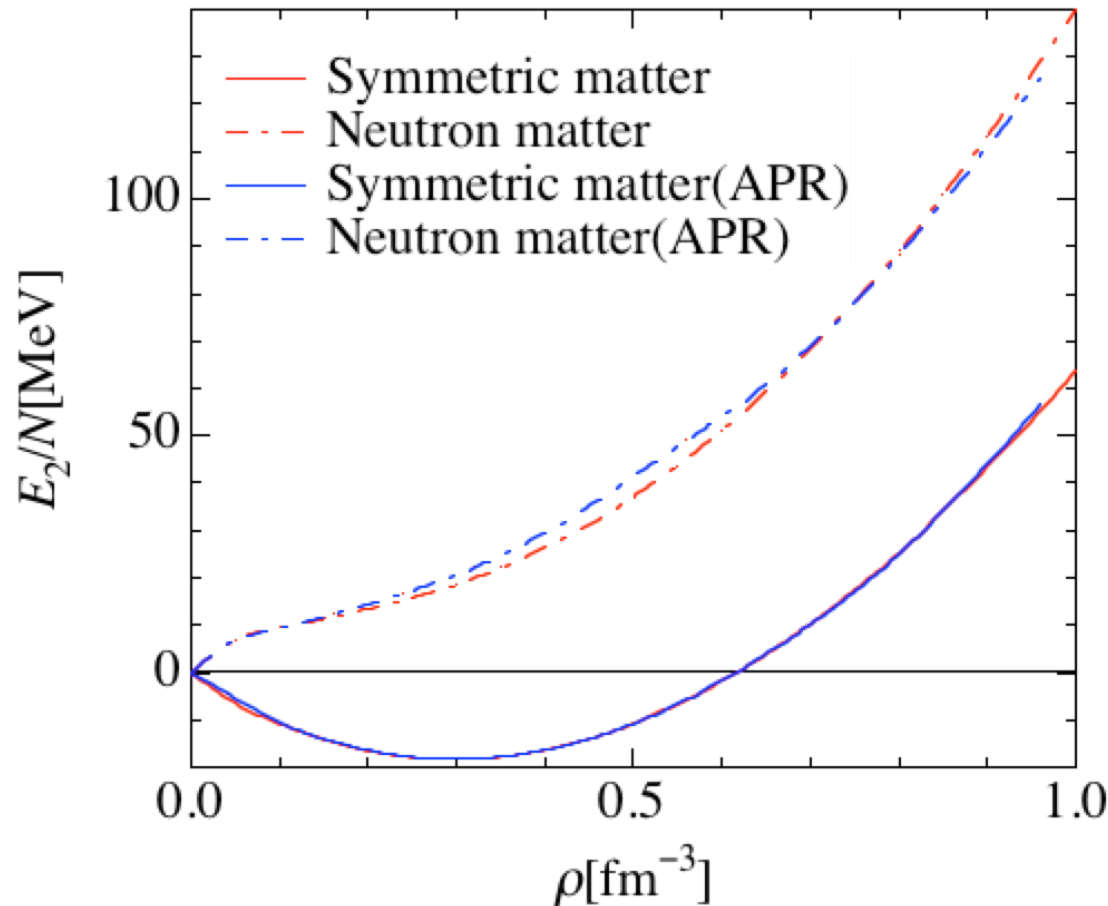
$$\boxed{r_h = a_h r_0} \quad \frac{4\pi r_0^3}{3} = \frac{1}{\rho}$$

a_h : Adjustable parameter

APR (FHNC)による対称核物質のエネルギー計算値を再現するように決定.



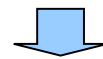
E_2/N : 2体力までのエネルギー



Kanzawa et al.
NPA791(2007)232

$$r_h = a_h r_0$$
$$a_h = 1.76$$

2体クラスター近似 + Healing distance条件



APR(FHNC計算)の結果を良く再現

*) A. Akmal et al., Phys. Rev. C58(1998)1804

3 体力エネルギー期待値

UIX potential $V_{ijk} = V_{ijk}^{2\pi} + V_{ijk}^R$
 $V_{ijk}^{2\pi}$: 2π 交換項 V_{ijk}^R : 斥力項

縮退したフェルミ気体の波動関数による期待値

$$\frac{E_3^{2\pi}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i < j < k} \langle V_{ijk}^{2\pi} \rangle_F \quad \frac{E_3^R}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i < j < k} \langle V_{ijk}^R \rangle_F$$

3 体力の不定性を利用し、核物質実験値を再現する

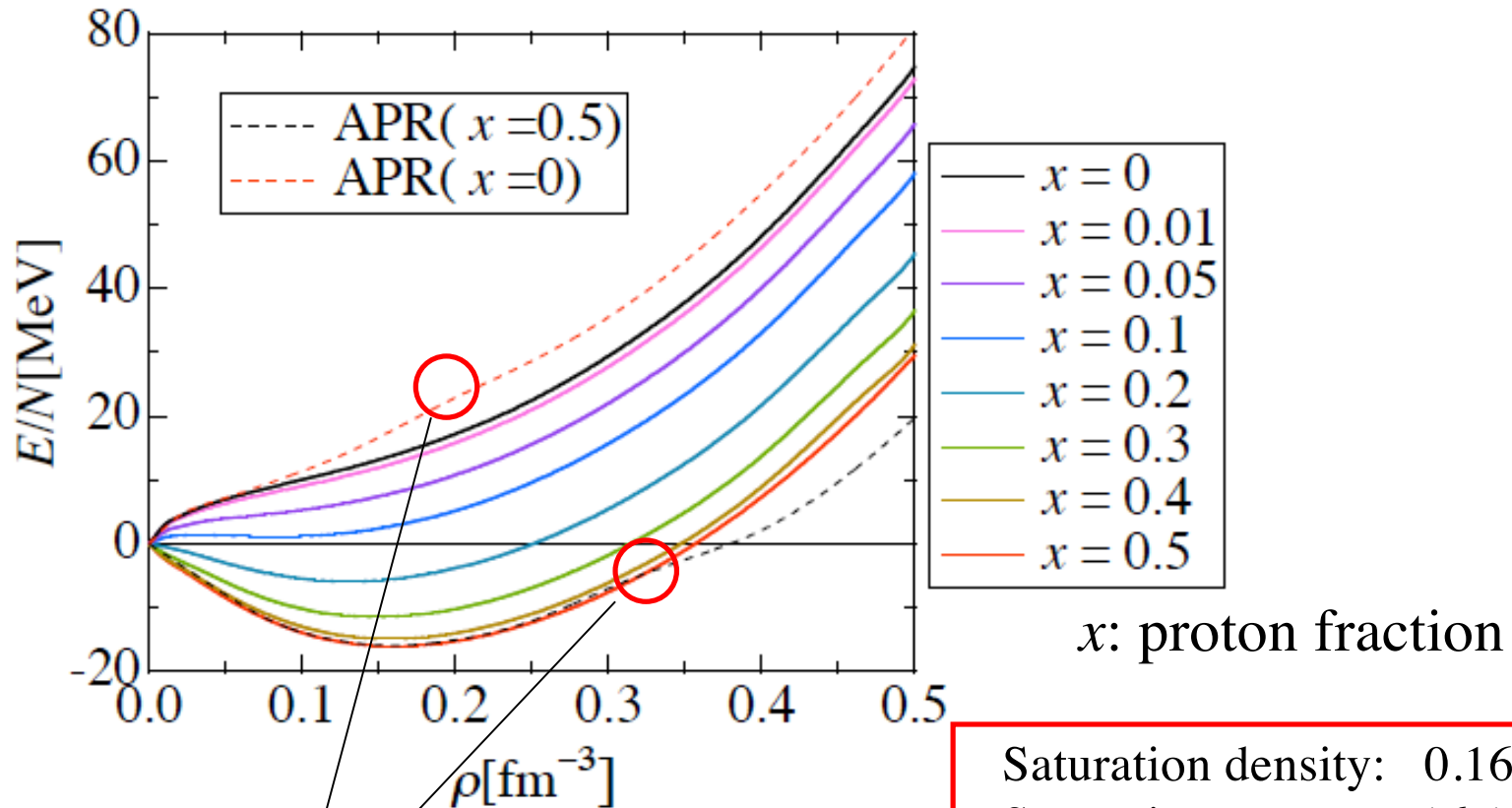
$$\frac{E_3}{N}(x) = \alpha \frac{E_3^R}{N}(x) + \beta \frac{E_3^{2\pi}}{N}(x) + \gamma \rho^2 e^{\rho \delta} [1 - (1 - 2x)^2]$$

全エネルギー $\frac{E}{N} = \frac{E_2}{N} + \frac{E_3}{N}$ 対称核物質に対する補正項 x : 陽子混在度

調節 parameters : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

核物質の経験値を再現するように決定

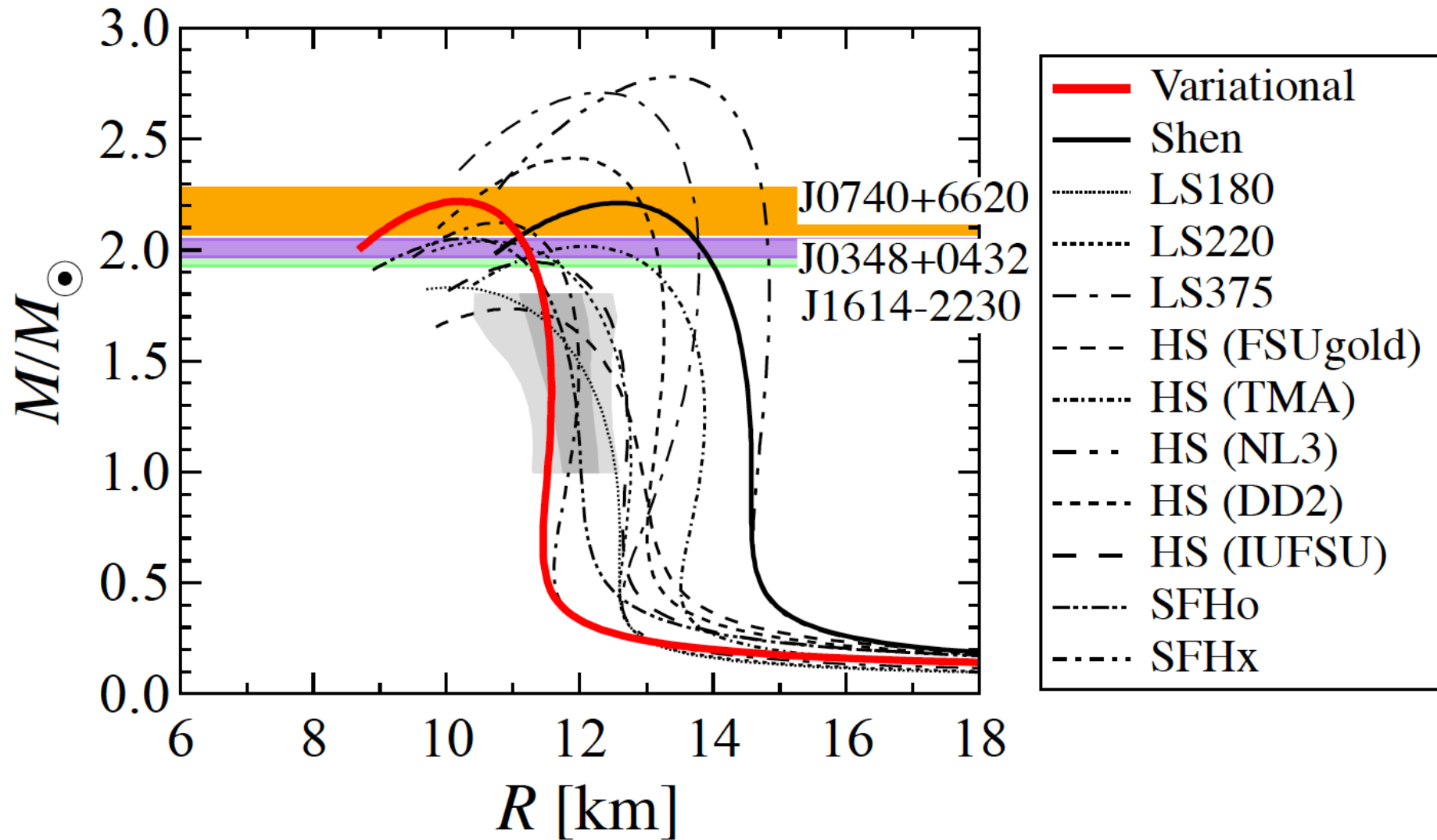
絶対零度非対称核物質のエネルギー



Pion condensation

Saturation density: 0.16 fm^{-3}
Saturation energy: -16.1 MeV
Incompressibility: 250 MeV
Symmetry energy: 30 MeV

中性子星の質量と半径の関係



有限温度一様非対称核物質の状態方程式

K. E. Schmidt and V. R. Pandharipande: Phys. Lett. 87B(1979) 11.

Free energy

$$\frac{F}{N} = \frac{E_0}{N} - T \frac{S_0}{N}$$

E_0/N : 内部エネルギー

S_0/N : エントロピー

$$\frac{E_0}{N} = \frac{E_2}{N} + \frac{E_3}{N}$$

E_2/N : 絶対零度での E/N における陽子と中性子の
一核子状態の占有確率を、
温度 T での平均占有確率 $n_i(k)$ に置き換える

E_3/N : 温度効果は無視する

平均占有確率 $n_i(k)$

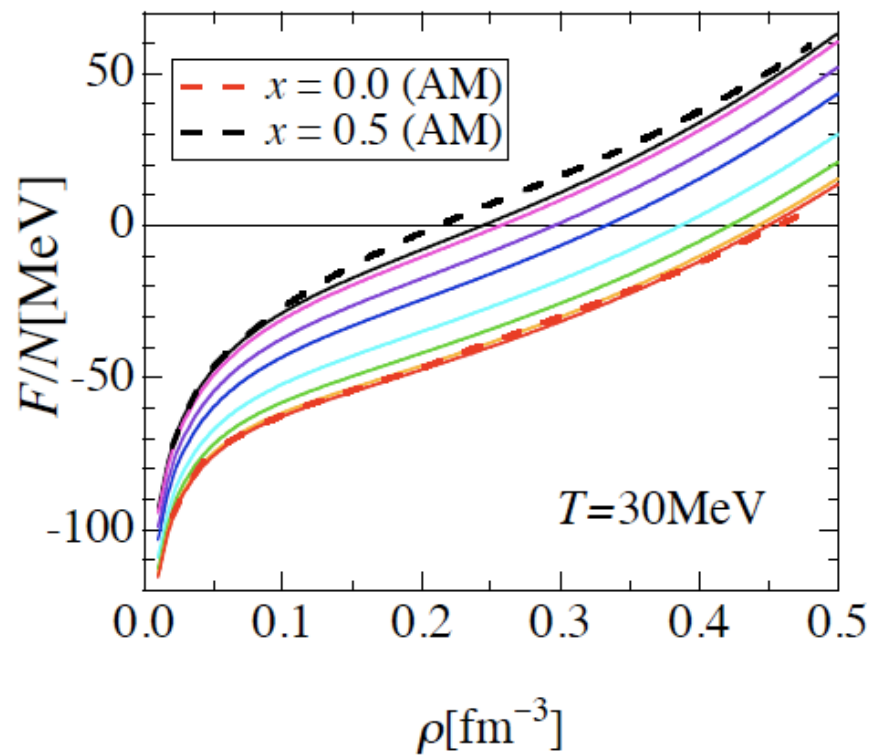
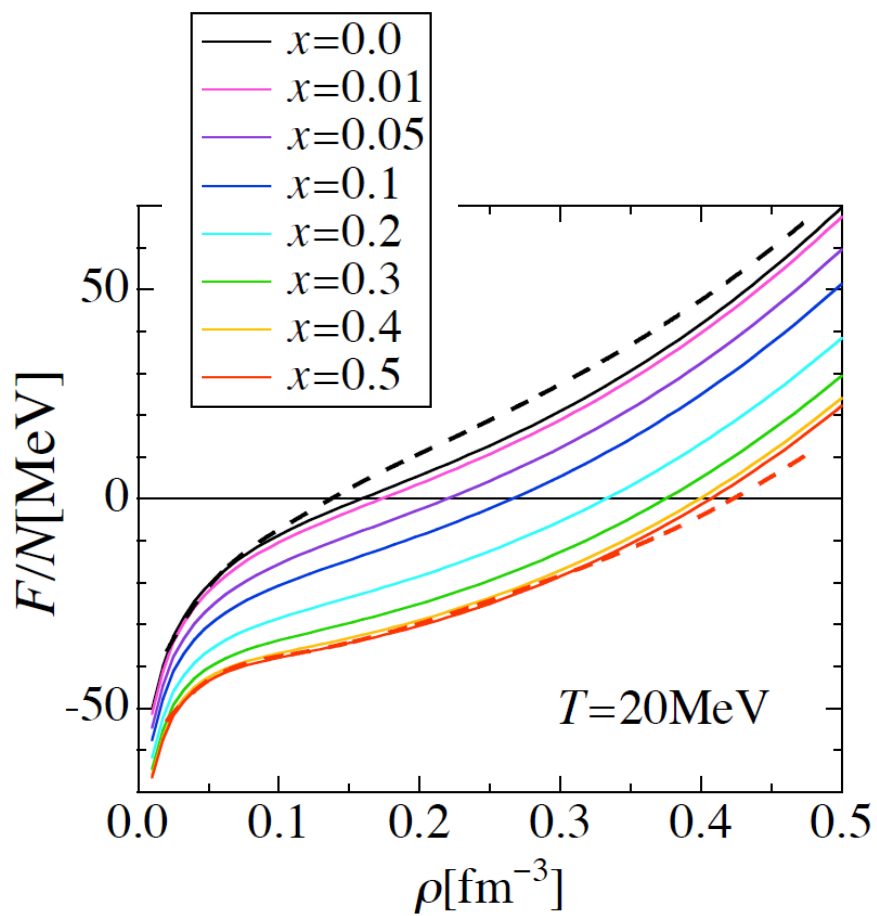
$$n_i(k) = \left\{ 1 + \exp \left[\frac{e_i(k) - \mu_i}{k_B T} \right] \right\}^{-1}, \quad e_i(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_i^*} \quad (i = p, n)$$

m_i^* ← 有効質量

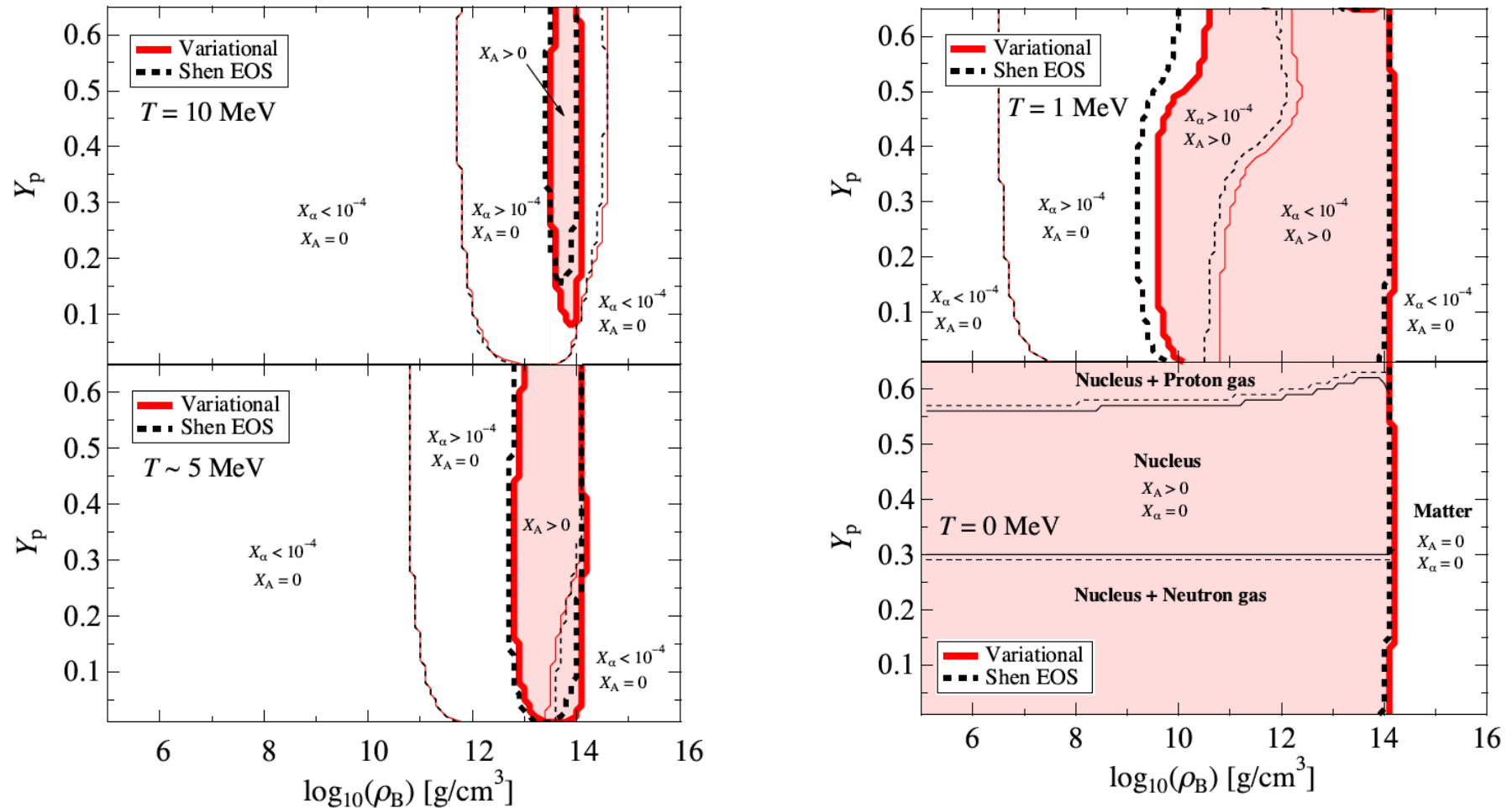
$$\frac{S_0}{N} = -\frac{k_B}{N} \sum_{i=p, n} \sum_j \left\{ [1 - n_i(k_j)] \ln[1 - n_i(k_j)] + n_i(k_j) \ln[n_i(k_j)] \right\}$$

自由エネルギーを m_p^* と m_n^* について最小化

非対称核物質の自由エネルギー



Phase Diagram of Nuclear Matter



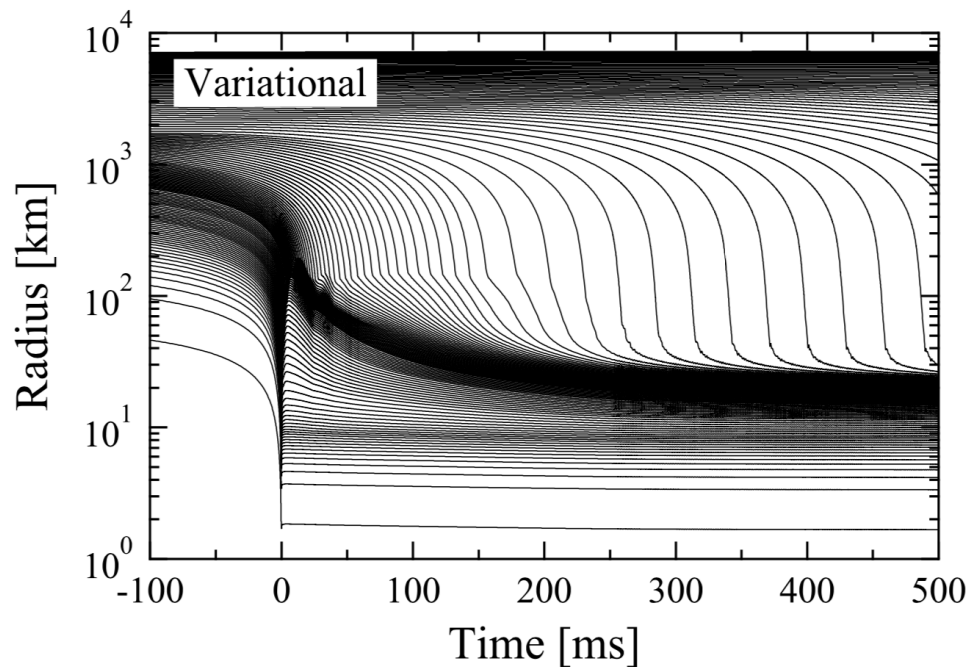
Application to Core-Collapse Supernovae

1D neutrino-radiation hydrodynamics simulations

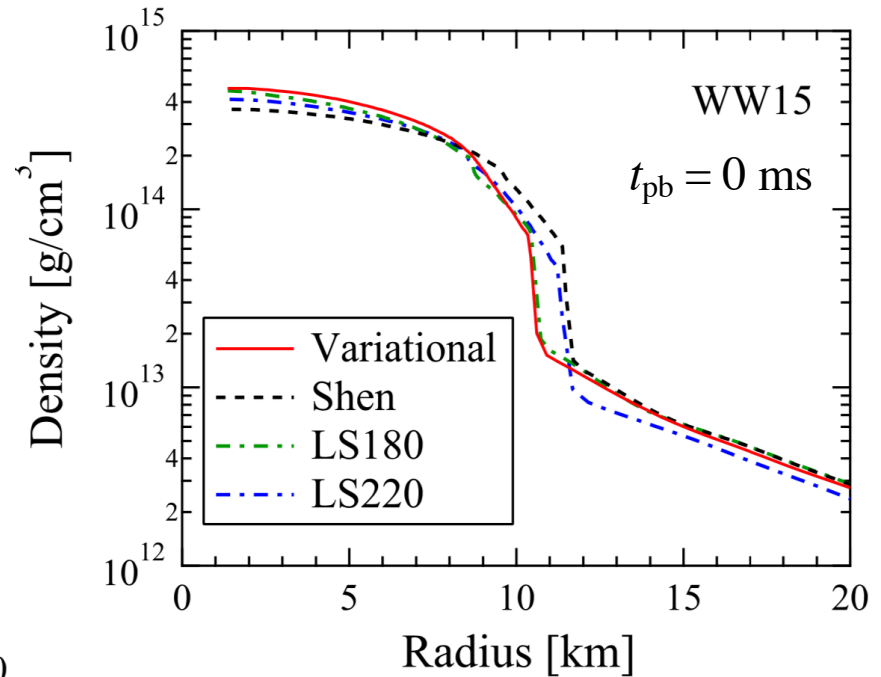
Progenitor: Woosley Weaver 1995, $15M_{\odot}$ (K. Sumiyoshi, et al., NPA 730 (2004) 227)
(Astrophys. J. Suppl. 101 (1995) 181)

More sophisticated multi-dimensional simulation

→ Takiwaki-san's talk in this afternoon!



Radial trajectories of mass elements



Central density: 0.30 fm^{-3}
Temperature: $\sim 10 \text{ MeV}$
Proton fraction: ~ 0.3

HT *et al.*, in preparation

OMEG2019 Togashi

変分法を用いた修正URCA過程のニュートリノ放出率

A. Dehghan Niri et al., Phys. Rev. C93 (2016) 045806



有効質量

$$Q_\nu^{\text{Mn}(e)} = \frac{11513}{945} \frac{G^2 (1 + 3c_A^2)}{c^4 \pi \hbar^{13} 2^{10}} m_n^{*3} m_p^* \frac{k_{Fp} k_{Fe}^2}{k_{Fn}^6} \mathcal{R}(k_{Fn}) (k_B T)^8$$

$$\mathcal{R}(k_{Fn}) = F_c^2 + 12.7 F_t^2$$

中心力相関

$$F_c = 4\pi k_{Fn}^3 \int_0^\infty dr r^2 j_0(k_{Fn} r) [f_c^{(nn)}(r) f_c^{(np)}(r) - 1]$$

テンソル力相関

$$F_t = 4\pi k_{Fn}^3 \int_0^\infty dr r^2 j_2(k_{Fn} r) f_c^{(nn)}(r) f_t^{(np)}(r)$$

相関関数：Lowest Order Constrained Variational(LOCV)法で評価

n-n相関： 1S_0 成分の中心力のみ

n-p相関： 3S_1 - 3D_1 成分を用いる

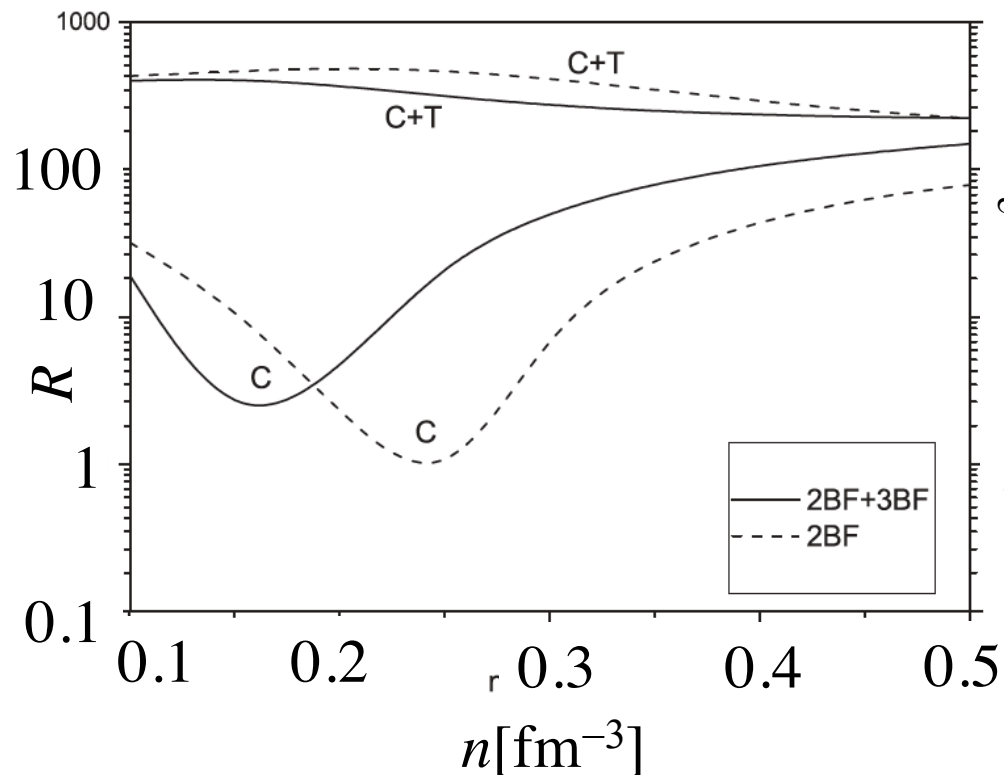
有効質量：G行列計算結果を代用する

LOCV法による修正URCA過程のニュートリノ放出率

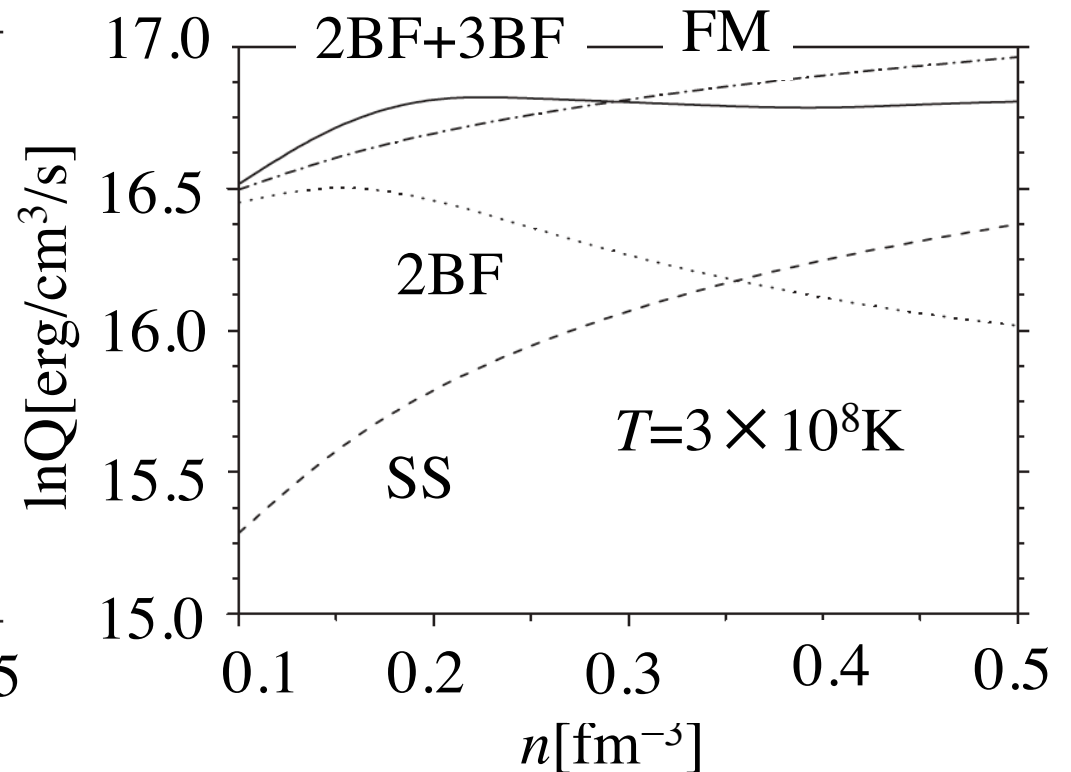
A. Dehghan Niri et al., Phys. Rev. C93 (2016) 045806

LOCV計算結果：中性子星物質

factor R



emissivity $\ln Q$



FM: Friman and Maxwell, Astrophys. J. 232(1979)541.

SS: R. F. Sawyer and A. Soni, Astrophys. J. 230 (1979)859.

Togashi EOSの相関関数を用いた 修正URCA過程のニュートリノ放出率

$$Q_{\nu}^{\text{Mn}(e)} = \frac{11513}{945} \frac{G^2 (1 + 3c_A^2)}{c^4 \pi \hbar^{13} 2^{10}} m_n^{*3} m_p^* \frac{k_{F_p} k_{F_e}^2}{k_{F_n}^6} \mathcal{R}(k_{F_n}) (k_B T)^8$$

$$(1 + 3c_A^2) R(k_{F_n}) = [F_{010}(k_{F_n})]^2 + \frac{27}{2} [F_{T11}(k_{F_n})]^2 \\ + c_A^2 \left\{ 3 [F_{001}(k_{F_n})]^2 + \frac{21}{2} [F_{T00}(k_{F_n})]^2 + 27 [F_{T11}(k_{F_n})]^2 \right\}$$

$$F_{sts'}(k) = 4\pi k^3 \int_0^\infty [f_{C1s}^-(r) f_{Cts'}^0(r) - 1] j_0(kr) r^2 dr$$

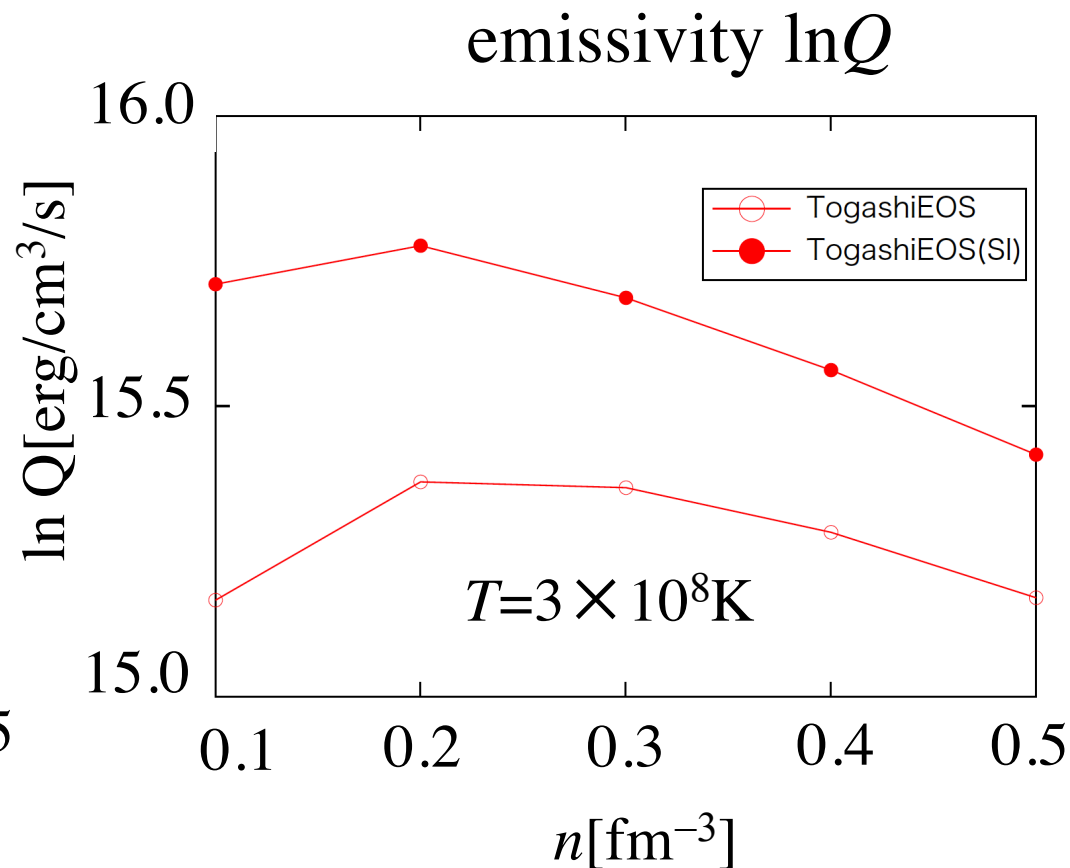
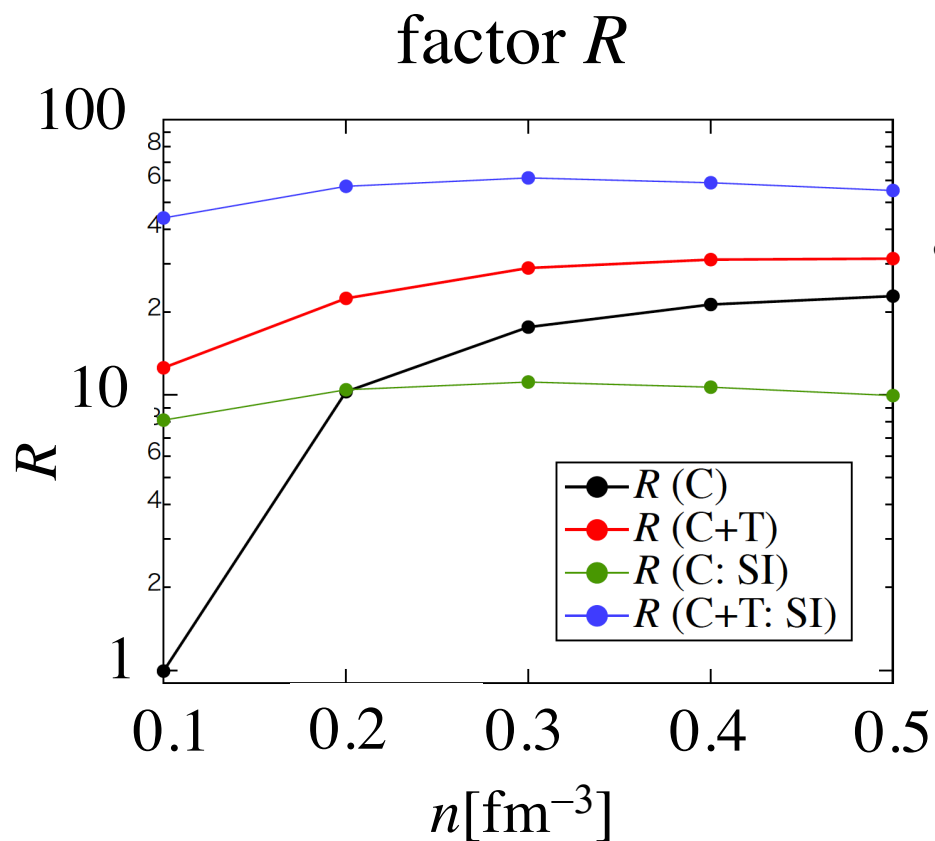
$$F_{Tst}(k) = 4\pi k^3 \int_0^\infty f_{C1s}^-(r) f_{Tt}^0(r) j_2(kr) r^2 dr$$

nn相関は中心力相関のみ

np相関は中心力相関 + テンソル力相関

TogashiEOSでの修正URCA過程のニュートリノ放出率

中性子星物質：陽子混在度はLOCV法での値を採用



エネルギー汎関数を用いた変分法

現実的核力に基づく核物質エネルギー計算のための変分法

核物質エネルギーを **2体分布関数の陽な汎関数** として表す
(EEF)



Euler-Lagrange方程式を解き、
十分に最小化したエネルギーを求める

2体クラスター項より高精度

主に、中性子物質と対称核物質のみ

2体の中心力+テンソル力(AV6' pot)
3体力: UIX pot. まで考慮

I 中性子物質

エネルギー汎関数に用いる関数①2体分布関数

- スピンに依存する動径分布関数

$$F_S(r) = \frac{1}{N\rho} \left\langle \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ij}) P_{sij} \right\rangle$$

- テンソル分布関数

$$F_T(r) = \frac{1}{N\rho} \left\langle \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ij}) S_{Tij} \right\rangle$$

N : 粒子数 ρ : 粒子数密度 P_{sij} : スピン射影演算子 S_{Tij} : テンソル演算子

- 補助関数 $F_S(r) = F_{CS}(r) + 8s[g_T(r)]^2 F_{SF}(r)$

$$F_{CS}(r), g_T(r) \quad F_T(r) = 16\sqrt{F_{C1}(r)F_{1F}(r)}g_T(r) - 16[g_T(r)]^2F_{1F}(r)$$

I 中性子物質

エネルギー汎関数に用いる関数②構造関数

$$S_{c1}(k) = \frac{1}{N} \left\langle \left| \sum_{i=1}^N \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \right|^2 \right\rangle = 1 + S_1(k) + S_0(k) \geq 0$$

$$S_{c2}(k) = \frac{1}{3N} \left\langle \left| \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\sigma}_i \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \right|^2 \right\rangle = 1 + \frac{1}{3} S_1(k) - S_0(k) \geq 0$$

$$S_{cT1}(k) = \frac{1}{Nk^2} \left\langle \left| \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \right|^2 \right\rangle = 1 + \frac{1}{3} S_1(k) - S_0(k) - \frac{S_T(k)}{3} \geq 0$$

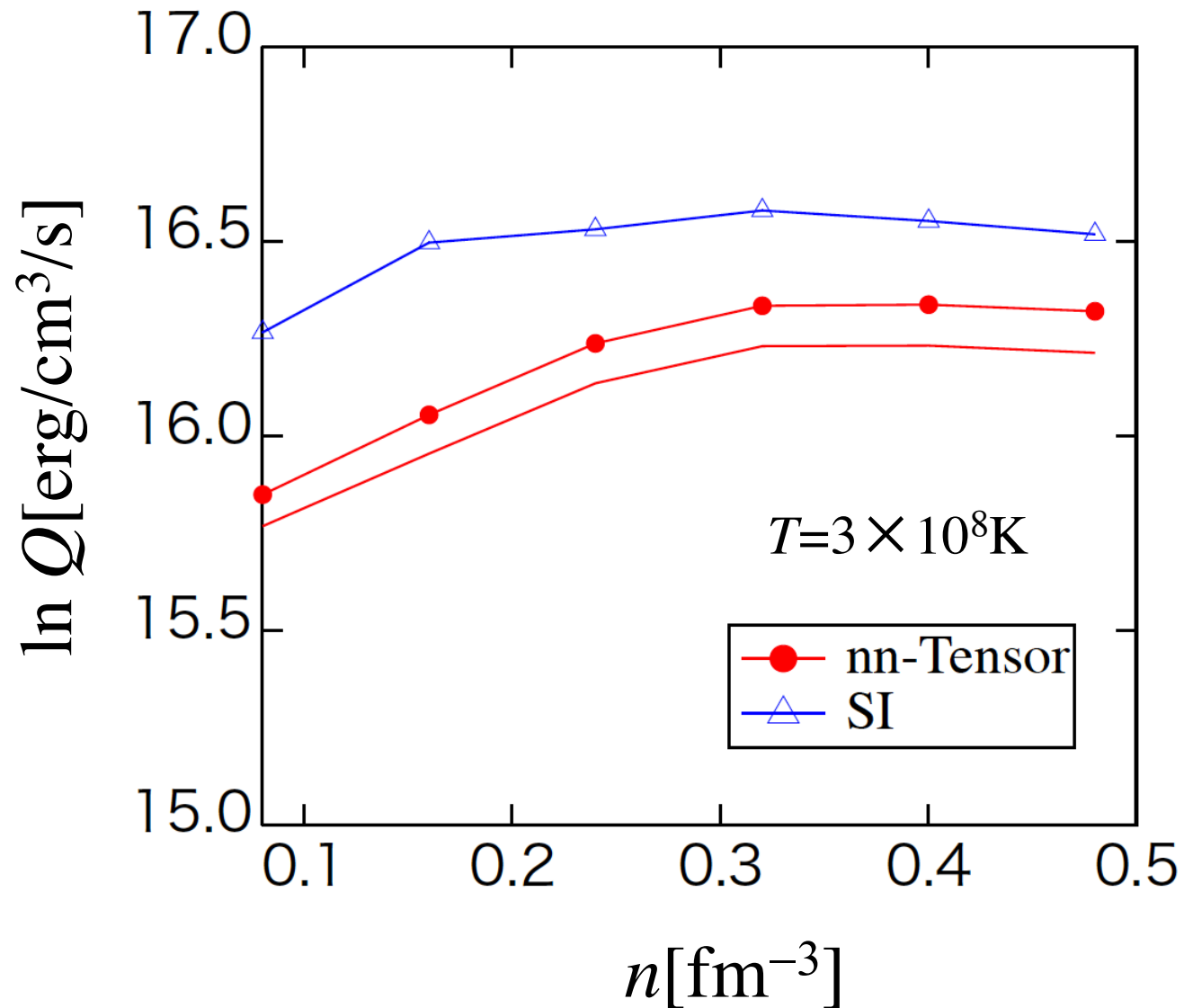
$$S_{cT2}(k) = \frac{1}{2Nk^2} \left\langle \left| \sum_{i=1}^N (\boldsymbol{\sigma}_i \times \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \right|^2 \right\rangle = 1 + \frac{1}{3} S_1(k) - S_0(k) + \frac{S_T(k)}{6} \geq 0$$

$$\begin{cases} S_S(k) = \rho \int [F_S(r) - F_S(\infty)] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ S_T(k) = 4\pi\rho \int_0^\infty F_T(r) j_2(kr) r^2 dr \end{cases}$$

中性子物質の一核子当たりのエネルギー

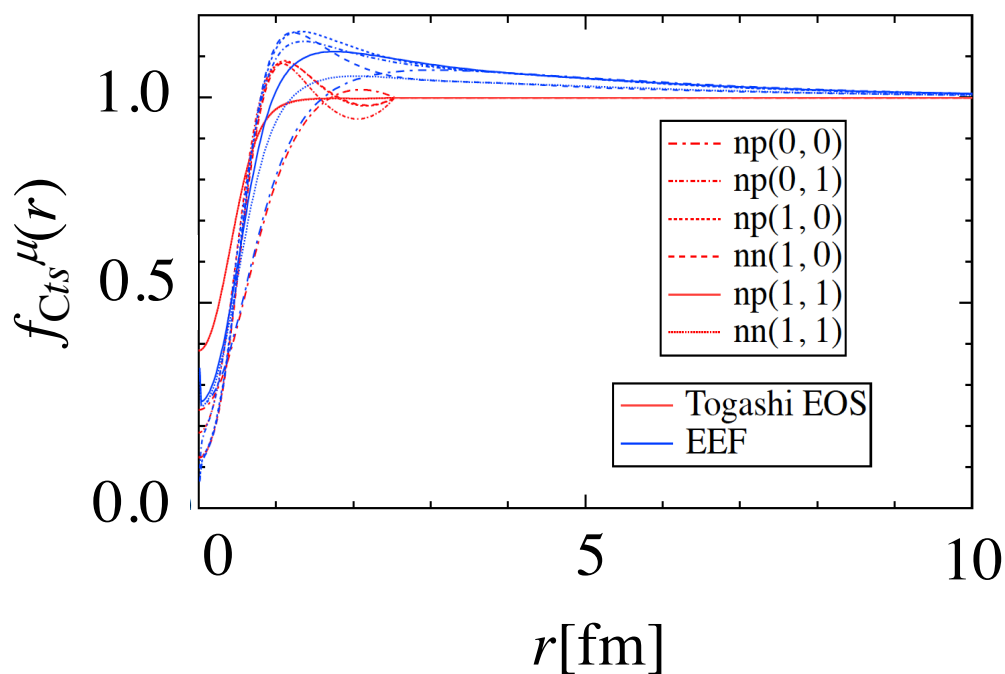
$$\begin{aligned}
 \frac{E}{N} = & \frac{3}{5} E_F + 2\pi\rho \int_0^\infty \left[\sum_{s=0}^1 F_s(r) V_s(r) + F_T(r) V_T(r) \right] r^2 dr \\
 & + \frac{\pi\hbar^2\rho}{2m} \int_0^\infty \sum_{s=0}^1 F_{cs}(r) \left[\frac{1}{F_{cs}(r)} \frac{dF_{cs}(r)}{dr} - \frac{1}{F_{sF}(r)} \frac{dF_{sF}(r)}{dr} \right]^2 r^2 dr \\
 & + \frac{16\pi\hbar^2\rho}{m} \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{dg_T(r)}{dr} \right]^2 + \frac{6}{r^2} [g_T(r)]^2 \right\} F_{1F}(r) r^2 dr + \frac{E_{\text{nod}}}{N} \\
 & - \frac{\hbar^2}{16\pi^2 m \rho} \int_0^\infty \frac{[S_{c1}(k) - 3 + 2S_{cF}(k)][S_{c1}(k) - S_{cF}(k)]^2}{S_{c1}(k)/S_{cF}(k)} k^4 dk \\
 & - \frac{\hbar^2}{16\pi^2 m \rho} \int_0^\infty \sum_{n=1}^2 n \frac{[S_{cTn}(k) - 3 + 2S_{cF}(k)][S_{cTn}(k) - S_{cF}(k)]^2}{S_{cTn}(k)/S_{cF}(k)} k^4 dk \\
 & + \frac{E^R}{N} + \frac{E^{2\pi}}{N}
 \end{aligned}$$

エネルギー汎関数を用いた変分法での修正URCA過程のニュートリノ放出率

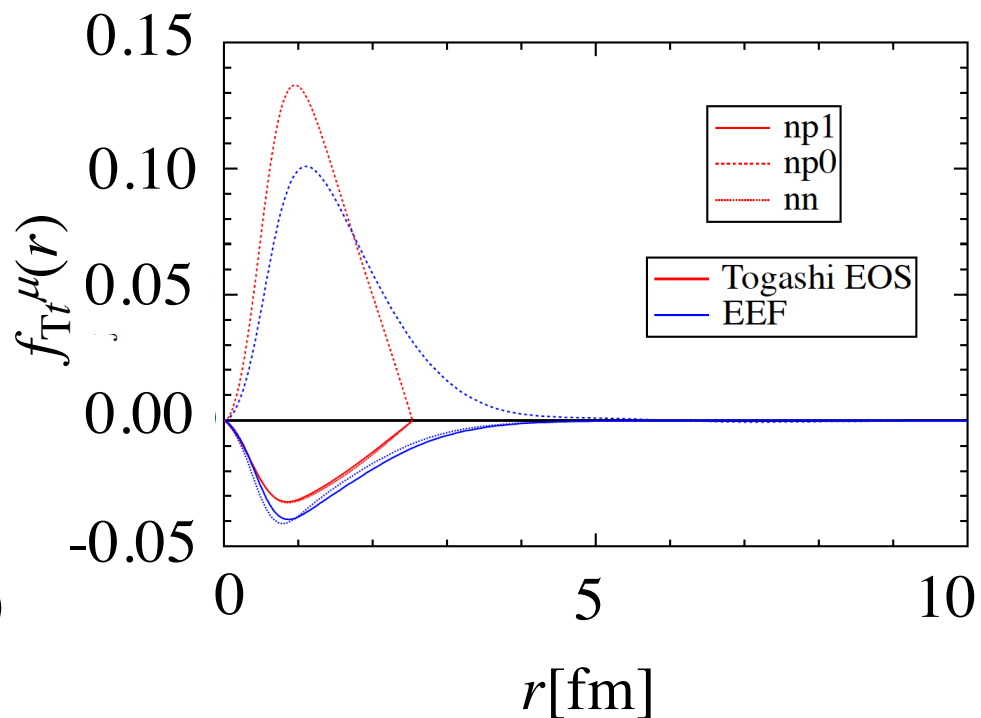


核子間相関関数

中心力型相関関数



テンソル力型相関関数



$$n = 0.08 \text{fm}^{-3}$$

ただし、EEFでの中心力型相関関数は2体クラスター近似

まとめ

富樫EOSを用いた修正URCA過程

ニュートリノ放射率の計算

先行研究よりも小さい放射率

エネルギー汎関数を用いた変分法

→より大きな放射率（近似計算）

今後の課題

- **Togashi EOSにおける相関関数の改良**
- **修正URCA過程計算の精度向上および拡張**
- **核子制動放射率計算への拡張**