

多次元一般相対論的ボルツマン ニュートリノノ輸送コード開発

早稲田大学 山田研 M2

赤穂龍一郎

Collaborators: 原田了(ICRR)、長倉洋樹(Princeton)、住吉光介(沼津工専)、岩上わかな(早大)、
大川博督(早大高等研)、古澤峻(東京理科大)、松古 栄夫(KEK)、山田章一(早大)

超新星におけるニュートリノ

観測シグナル

- 電磁シグナル観測ではわからない内部の情報が得られる。(バウンス等)
- 深部の高密度物理のプローブとして使える。

ダイナミクス

- 解放される重力エネルギーの99%以上はニュートリノに変換される。(爆発エネルギーは1%)
- ミクロな反応が周囲の物質の巨視的ダイナミクスに大きな影響を与える。

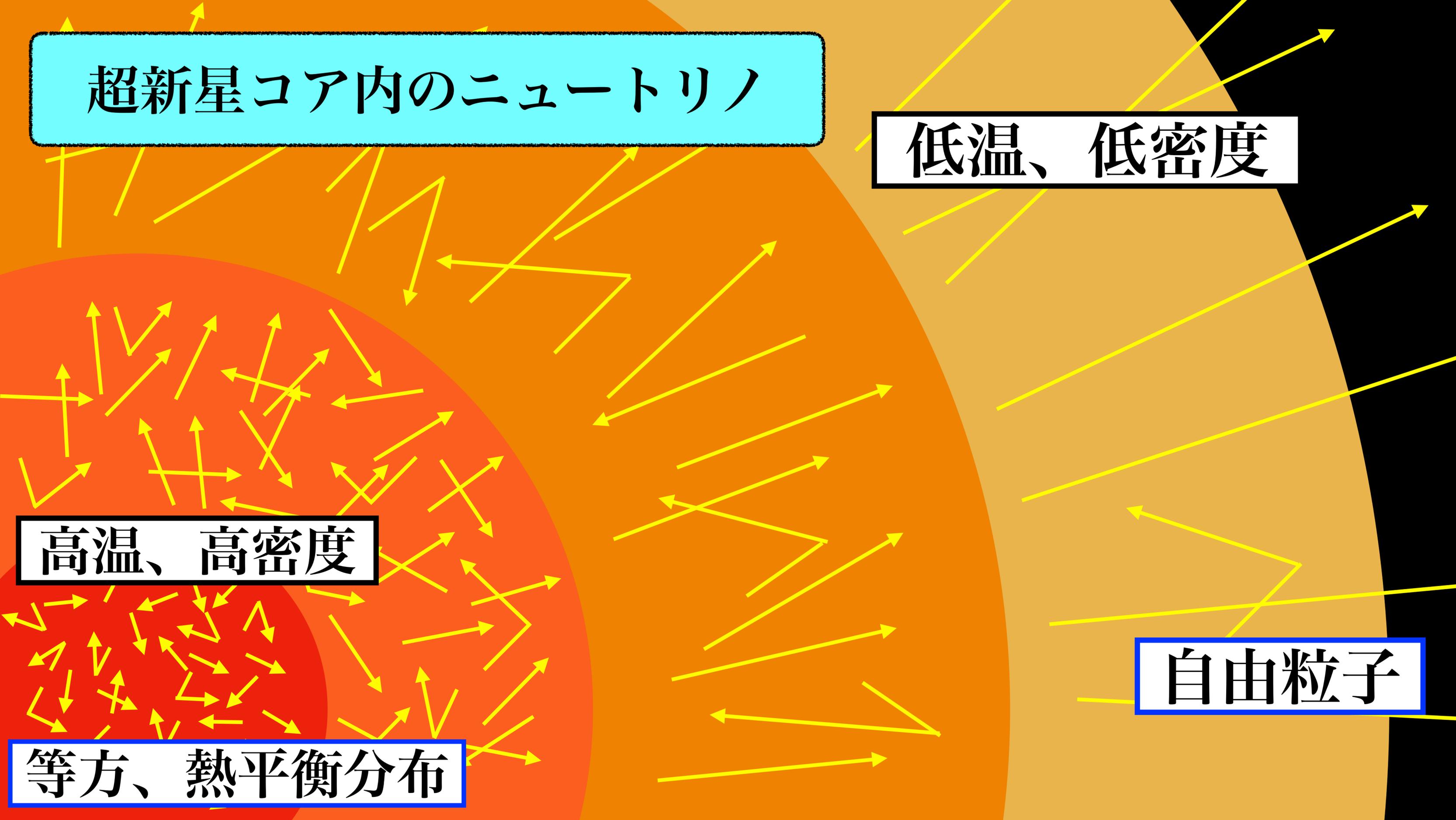
超新星コア内のニュートリノ

低温、低密度

高温、高密度

自由粒子

等方、熱平衡分布



輻射流体シミュレーション

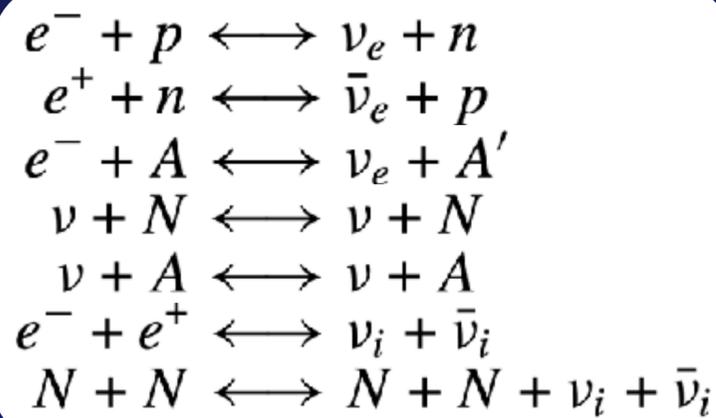
流体力学計算

back reaction

ρ
 Y_e
 T

EOS

μ



反応率計算

輻射輸送計算

$$G^\mu = \int p^\mu \epsilon S_{\text{rad}} dV_p$$

$$\Gamma = \int \epsilon S_{\text{rad}} dV_p$$

ボルツマン方程式

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \Big|_{p^i} + \frac{dp^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial p^i} \Big|_{x^\mu} = \underbrace{p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \Big|_{p^i}}_{\text{空間移流項}} - \underbrace{\Gamma^i_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \frac{\partial f}{\partial p^i} \Big|_{x^\mu}}_{\text{運動量移流項}} = \underbrace{\left[\frac{\delta f}{\delta t} \right]}_{\text{衝突項}}_{\text{collision}}$$

空間移流項:
空間移動

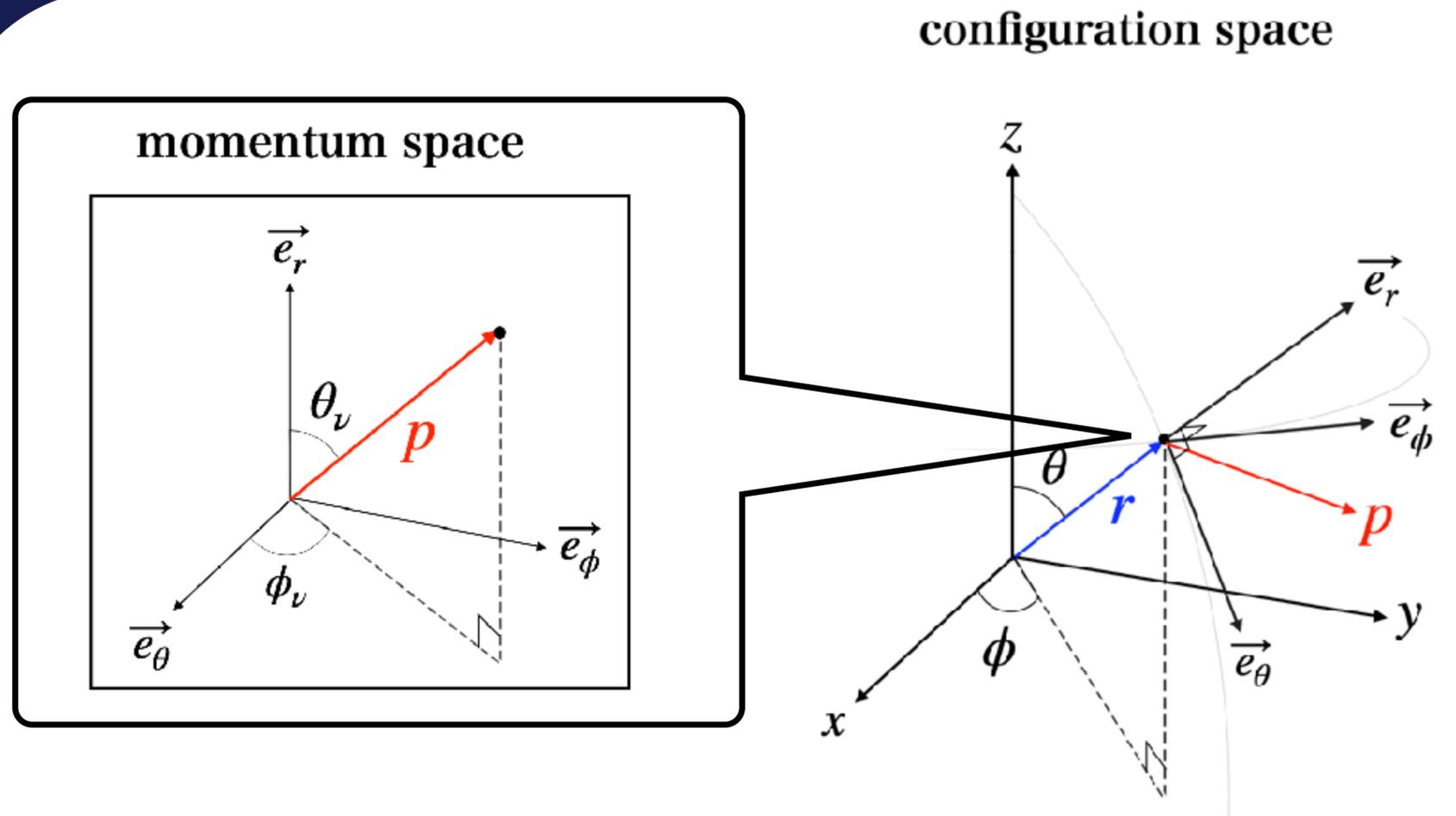
運動量移流項:
運動量変化

衝突項: 反応によるエネルギー・
運動量変化

位相空間分布関数 $f(x^\mu, p^i)$

7 (1+3+3)個の変数

$0 < f < 1$ (Fermion)



ボルツマン方程式の計算コスト

ボルツマン方程式は 7次元の方程式であるため、直接解くのに非常に計算コストがかかる。

例: 超新星計算をメッシュ数

$$N_r \times N_\theta \times N_\phi \times N_\epsilon \times N_{\theta_\nu} \times N_{\phi_\nu} = 384 \times 128 \times 1 \times 20 \times 10 \times 6$$

で300ミリ秒行うのにスパコン京の1536ノードを使って半年かかる

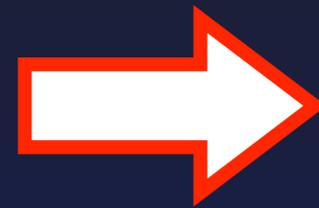
この計算コストを避けるため、これまで多数の輸送近似法が用いられてきた

輻射輸送スキーム

Full transport

Boltzmann Monte Carlo

resolution (MCの場合は粒子数)を
上げれば正しい解に収束



正確なシミュレーション
近似法の妥当性の評価
(+ ニュートリノ集団振動)

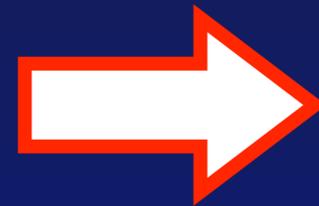
近似法

two-moment (M1 closure ...)

IDSA

FLD

その他多数



高解像度、長時間計算、
多モデル

運動量空間の情報を削減し
て計算コストを下げる

近似法の例: モーメント法

分布関数を直接扱うのではなく、運動量空間角度積分した量を扱う。

$$E = \int \epsilon f d\Omega$$

$$F^\mu = \int \epsilon l^\mu f d\Omega$$

$$P^{\mu\nu} = \int \epsilon l^\mu l^\nu f d\Omega$$

運動量空間内角度積分

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\partial_j F^j \dots$$

$$\frac{\partial F^i}{\partial t} = -\partial_j P^{ij} \dots$$

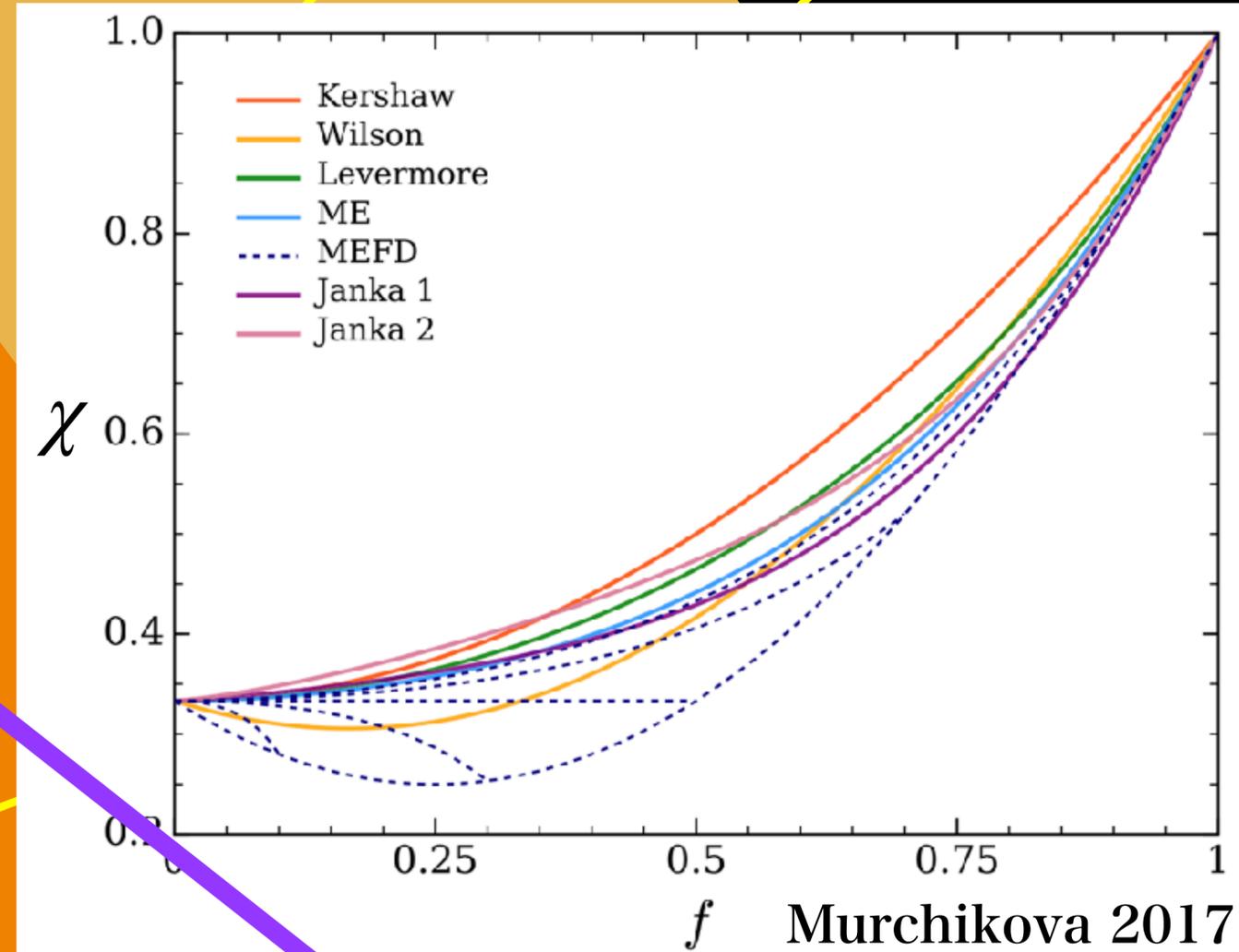
n 次モーメントの発展方程式
に n+1 次モーメントが出現

適当な次数で打ち切る必要
がある (**closure 関係式**)

$$P^{ij} = \frac{3\chi - 1}{2} P_{\text{thin}}^{ij} + \frac{3(1 - \chi)}{2} P_{\text{thick}}^{ij}$$

解析解のinterpolation

$$P^{ij} = \frac{3\chi - 1}{2} P^{ij}_{\text{thin}} + \frac{3(1 - \chi)}{2} P^{ij}_{\text{thick}}$$



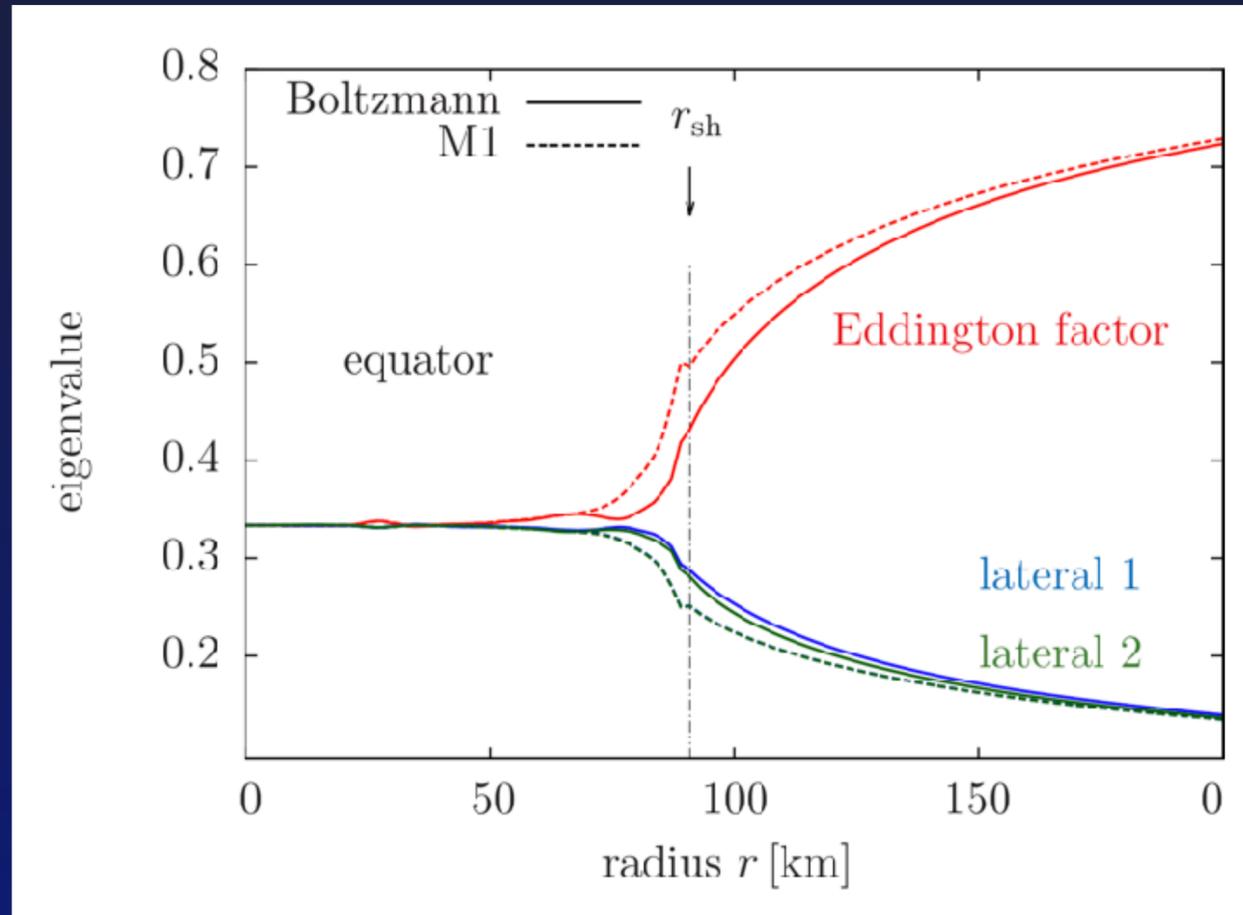
$$P^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{3}$$

中間領域: ボルツマンソ
ルバーで解く必要がある

$$P^{ij} = \frac{F^i F^j}{F^2}$$

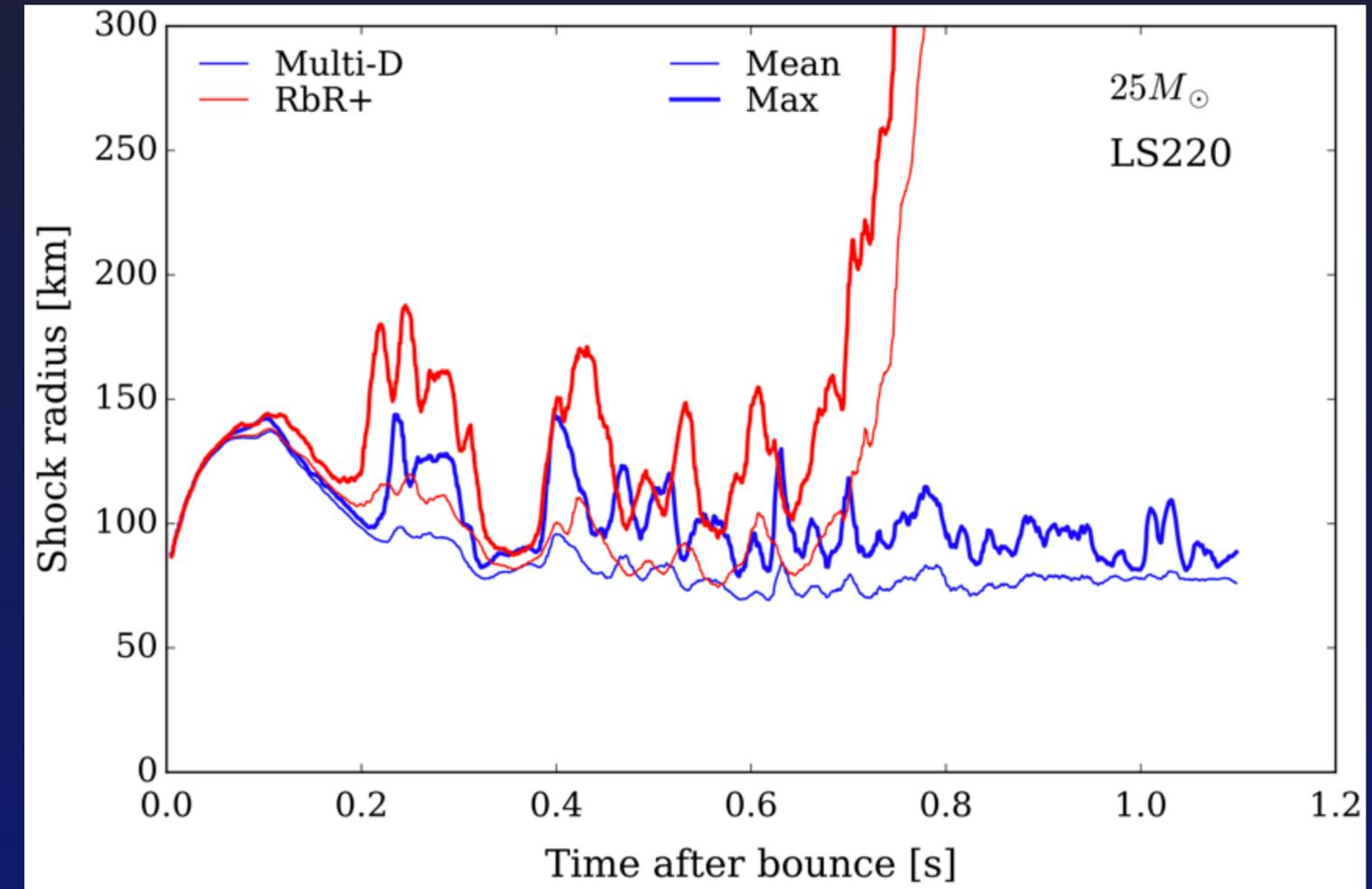
輸送スキーム同士の比較

Boltzmann と M1でのEddington Factor
の比較 (前スライドのinterpolation factor χ)



Harada 2019

近似法同士の比較 (FMD vs RbR)



大規模計算はますます容易に

スパコン「京」(2012-2019) : peak 10 PFOLS



現在運用中の代表的なスパコン

理研「富岳」 : peak 537 PFLOPS, (Top500 1位)

Oakforest-PACS: peak 25 PFLOPS, (Top500 22位)

計算コストの高いボルツマン計算を行うべき時代に来ている。

現時点で、空間多次元、一般相対論的ボルツマンニュートリノ輸送による重力崩壊計算は存在しない。

- 球対称、一般相対論的 (Sumiyoshi 2005, Liebendörfer 2001)
- 多次元、非一般相対論的 (Sumiyoshi 2012, Nagakura 2014, 2017 …)

このコードを使ったシミュレーション: 岩上さん (次の講演)、原田さん (ポスター)

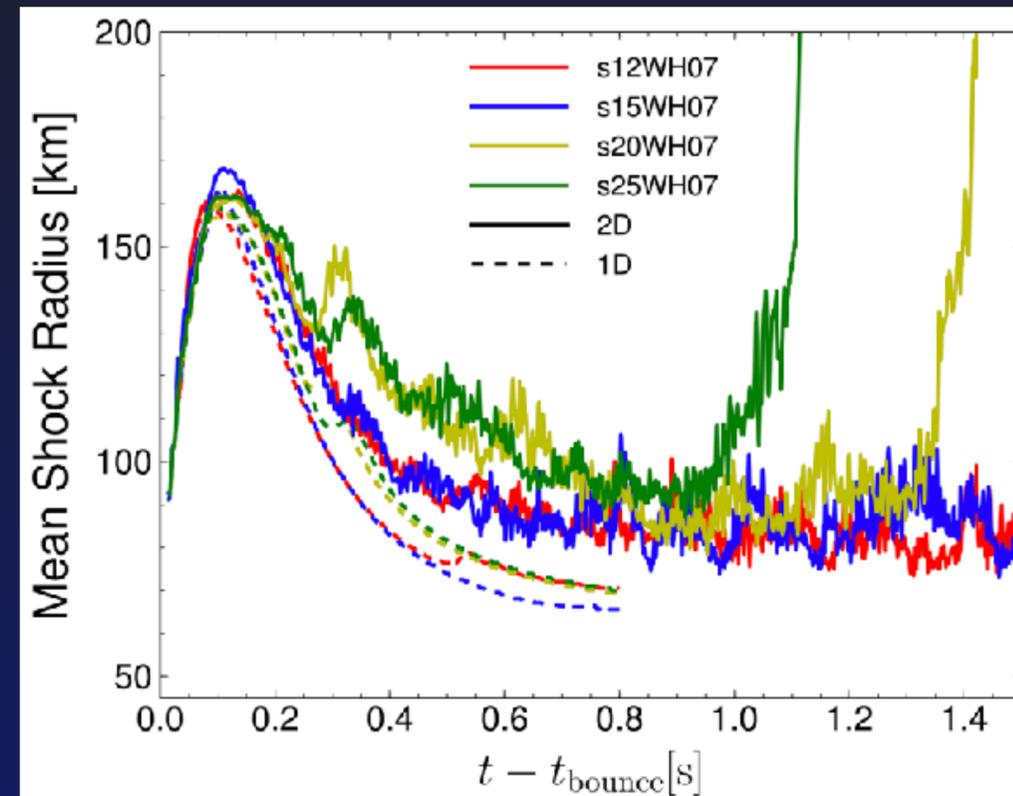
データ解析: 西河君 (ポスター)

本研究では、コードを一般相対論的に拡張した。

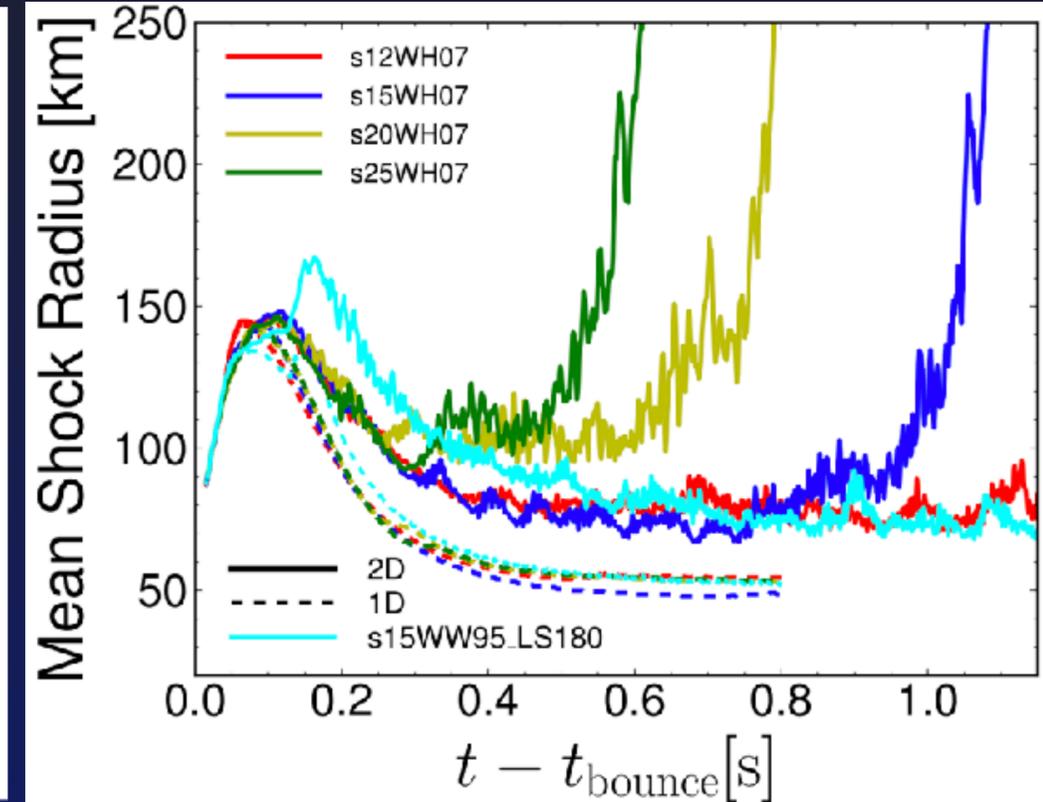
一般相対論的効果

比較的重力の弱い中性子星形成の場合にも一般相対論的効果が重要

SR



GR



O'Connor 2018

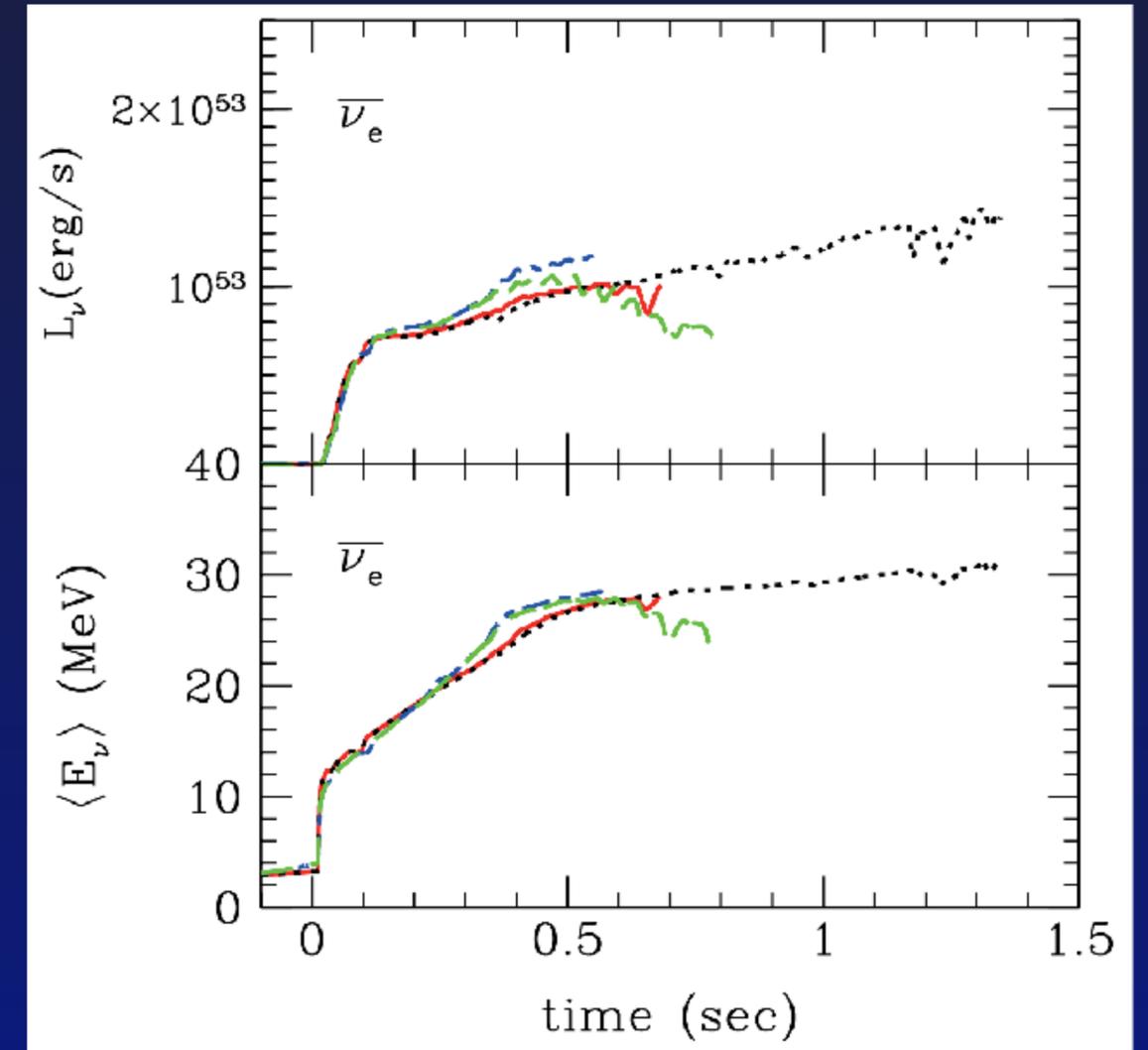
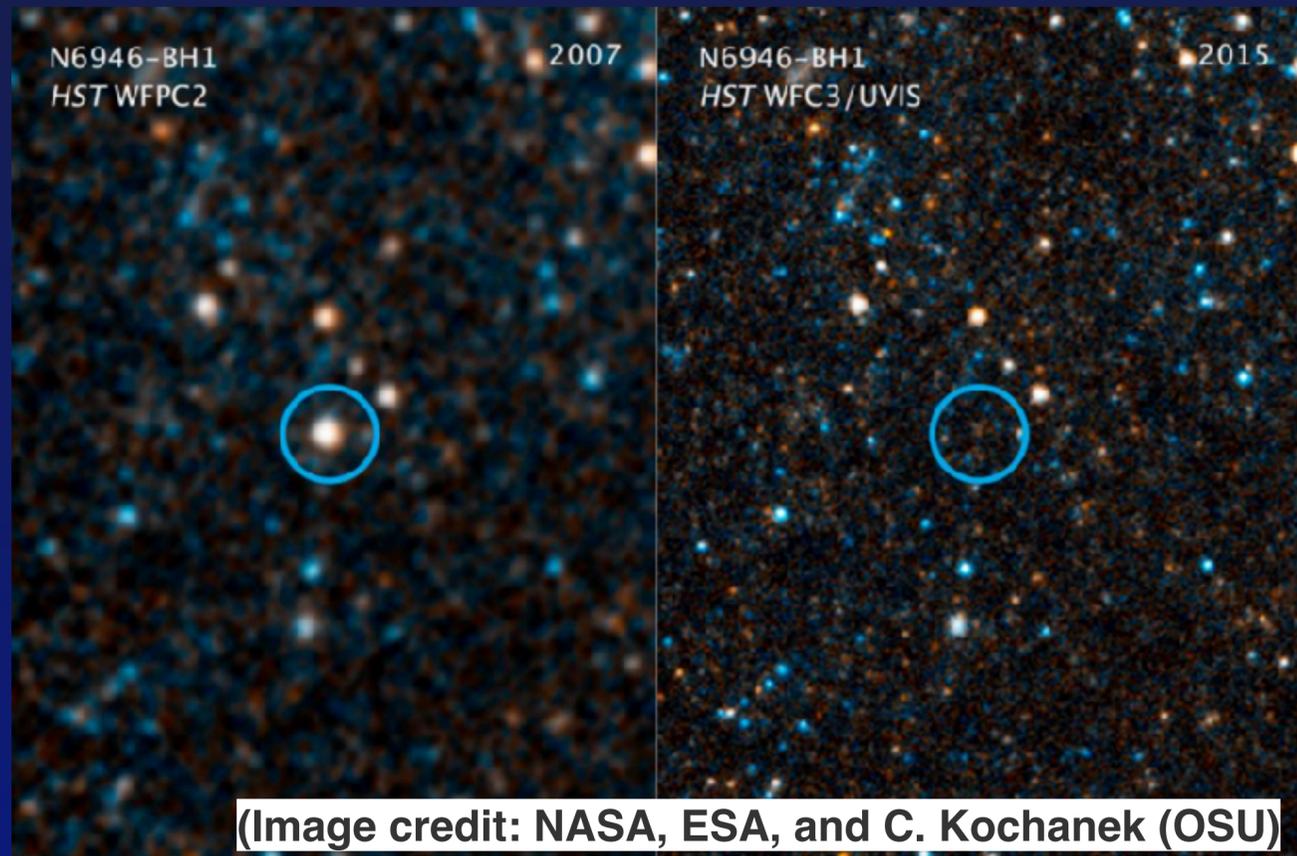
ブラックホール形成ではもちろん一般相対論的効果は不可欠。

Failed Supernova と ブラックホール形成

停滞衝撃波が外層まで到達できなかった現象。光学的に暗いが、ニュートリノでは観測することは可能。ブラックホールが形成されることが多いと考えられる。

中性子星形成よりも高エネルギーでたくさん放出

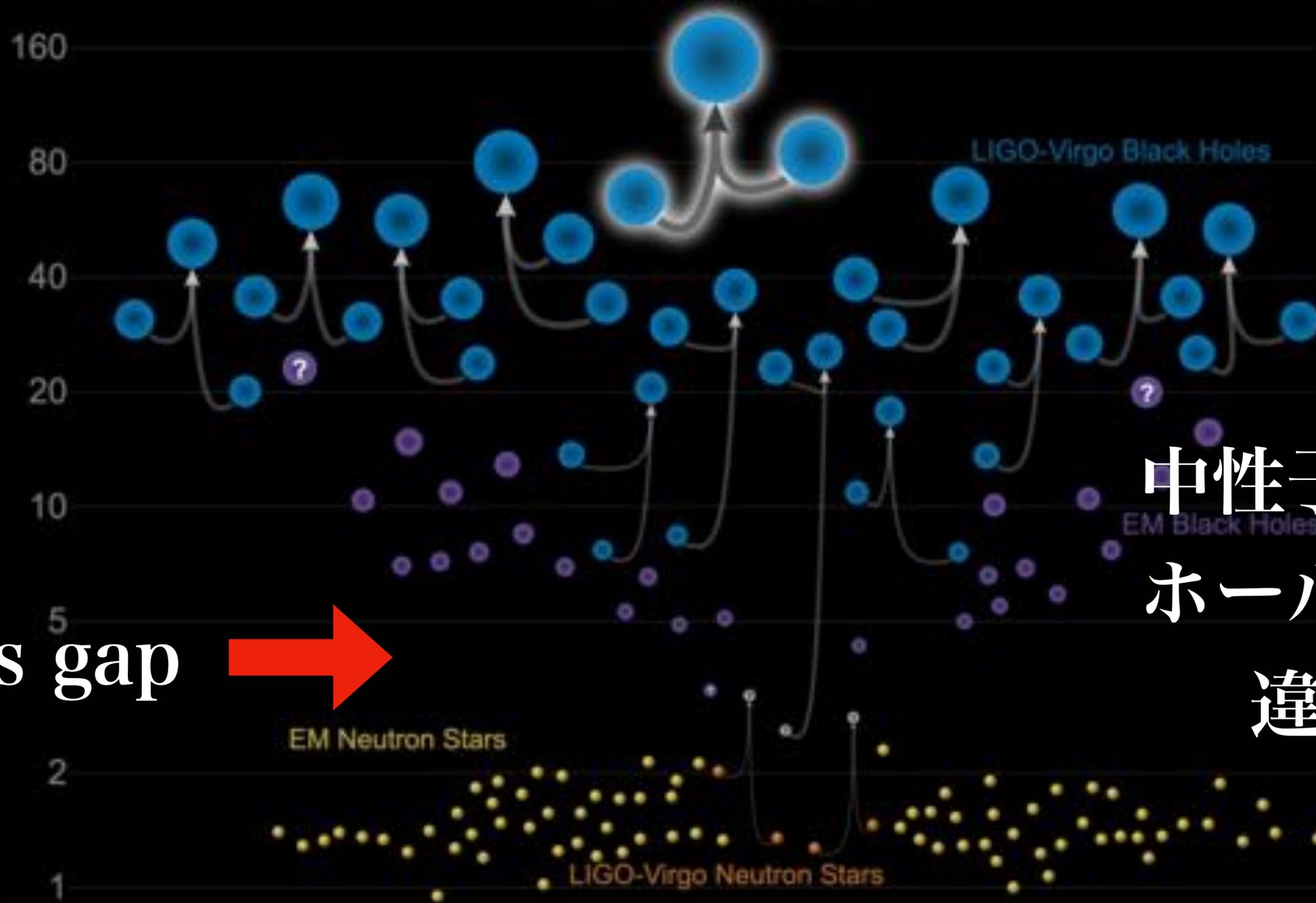
ブラックホール形成のタイミングがスペクトルからわかると、EOSに強い制限がつけられる。



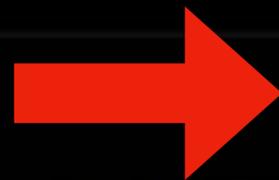
Nakazato (2010)

Masses in the Stellar Graveyard

in Solar Masses



Mass gap



中性子星とブラック
ホールの形成過程の
違いは何か？

Image credit: LIGO-Virgo/ Northwestern U. / Frank Elavsky & Aaron Geller.

Updated 2020-09-02

ボルツマン方程式

保存系のボルツマン方程式 (Shibata 2014)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} \nu^{-1} p^\alpha f)}{\partial x^\alpha} \Big|_{q(i)} + \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} (-\nu f p^\alpha p_\beta \nabla_\alpha e_{(0)}^\beta) + \frac{1}{\sin \bar{\theta}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left(\nu^{-2} \sin \bar{\theta} f \sum_{j=1}^3 p^\alpha p_\beta \nabla_\alpha e_{(j)}^\beta \frac{\partial \ell_{(j)}}{\partial \bar{\theta}} \right) + \frac{1}{\sin^2 \bar{\theta}} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left(\nu^{-2} f \sum_{j=2}^3 p^\alpha p_\beta \nabla_\alpha e_{(j)}^\beta \frac{\partial \ell_{(j)}}{\partial \bar{\varphi}} \right) = S_{\text{rad}}$$

$$l_{(1)} = \cos \theta_\nu,$$

$$l_{(2)} = \sin \theta_\nu \cos \phi_\nu,$$

$$l_{(3)} = \sin \theta_\nu \sin \phi_\nu.$$

$$\omega_{(0)} \equiv \nu^{-2} p^\alpha p_\beta \nabla_\alpha e_{(0)}^\beta,$$

$$\omega_{(\theta_\nu)} \equiv \sum_{i=1}^3 \omega_{(i)} \frac{\partial l_{(i)}}{\partial \theta_\nu},$$

$$\omega_{(\phi_\nu)} \equiv \sum_{i=2}^3 \omega_{(i)} \frac{\partial l_{(i)}}{\partial \phi_\nu},$$

$$\omega_i \equiv \nu^{-2} p^\alpha p_\beta \nabla_\alpha e_{(i)}^\beta.$$

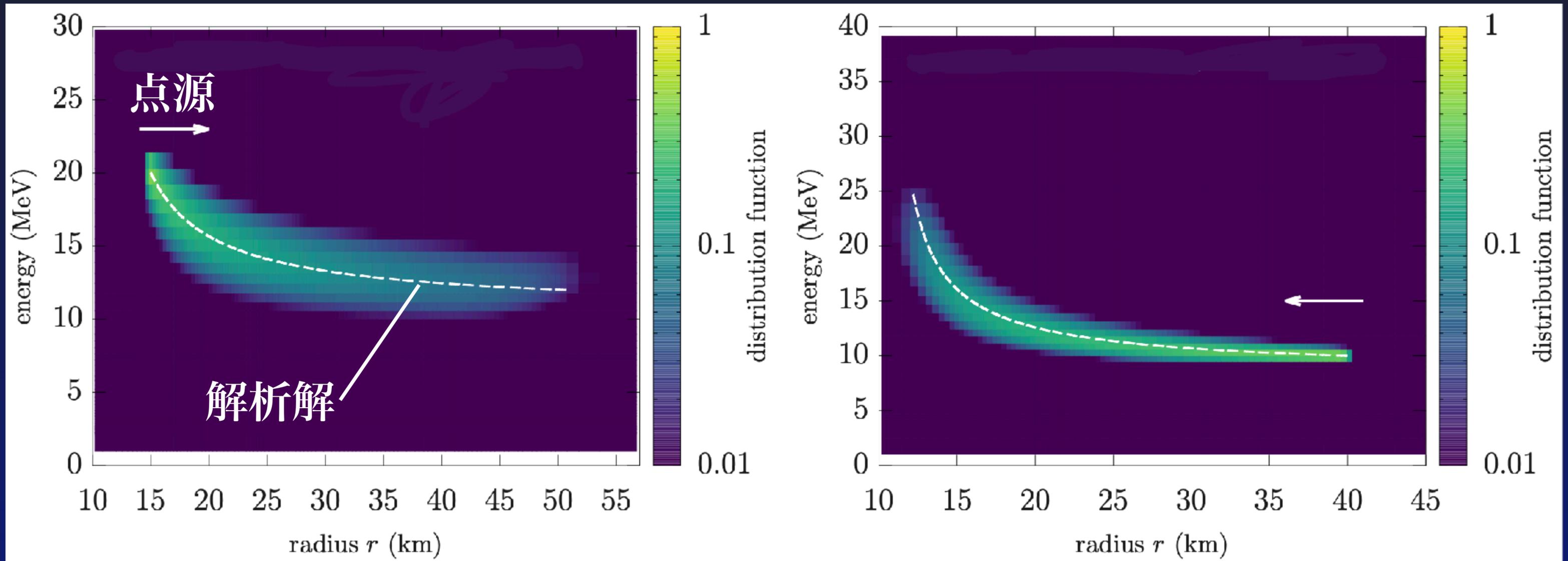
$$e_{(0)}^\alpha = n^\alpha,$$

$$e_{(1)}^\alpha = \gamma_{rr}^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\alpha,$$

$$e_{(2)}^\alpha = -\frac{\gamma_{r\theta}}{\sqrt{\gamma_{rr}(\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta} - \gamma_{r\theta}^2)}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\alpha + \sqrt{\frac{\gamma_{rr}}{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta} - \gamma_{r\theta}^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^\alpha$$

$$e_{(3)}^\alpha = \frac{\gamma^{r\phi}}{\sqrt{\gamma^{\phi\phi}}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\alpha + \frac{\gamma^{r\theta}}{\sqrt{\gamma^{\phi\phi}}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^\alpha + \sqrt{\gamma^{\phi\phi}} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^\alpha$$

テスト計算: 重力赤方偏移



外向きに移動してエネルギー減少

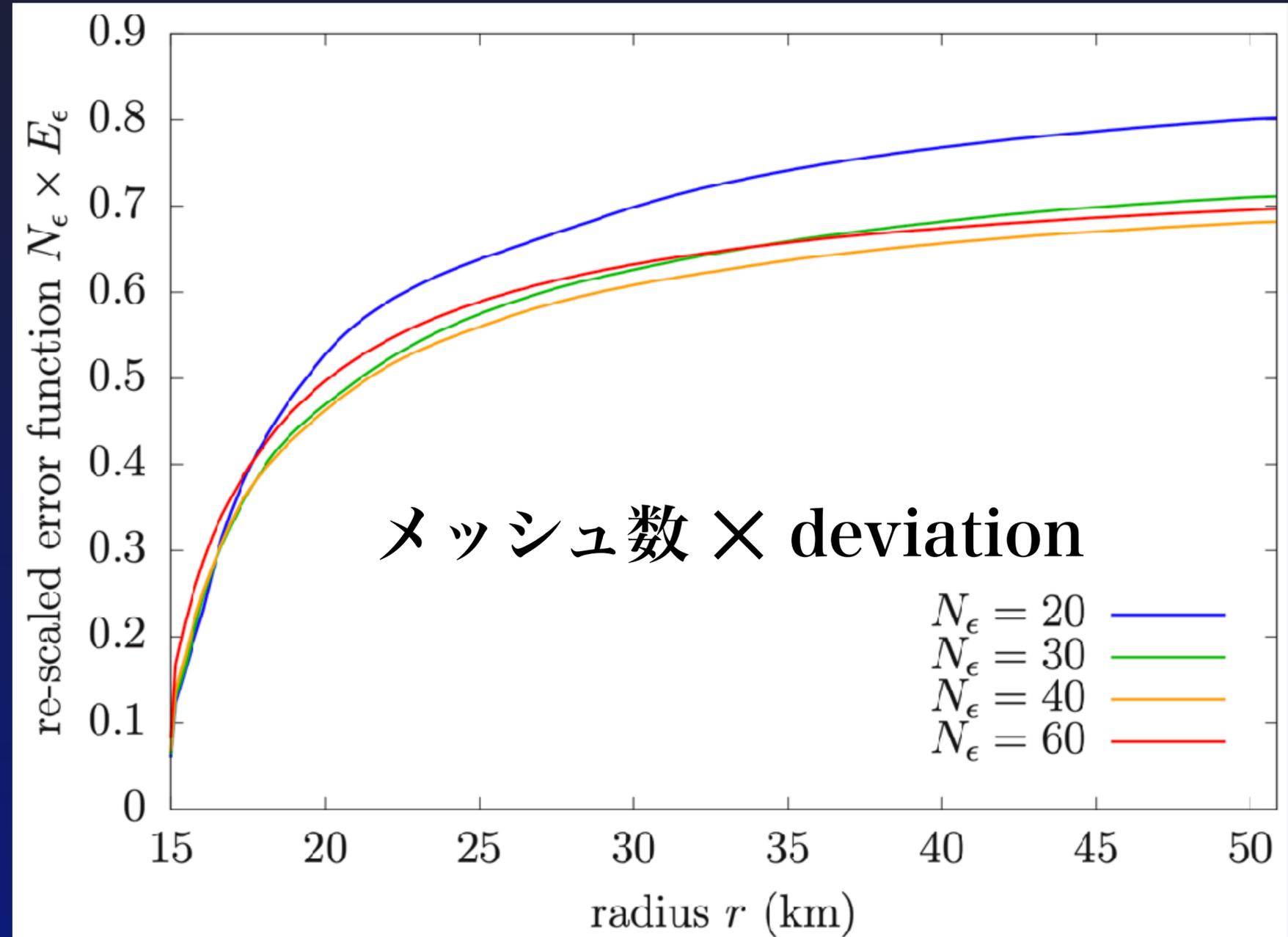
Resolution Convergence

解析解からのdeviation を次で定義:

$$E_\epsilon(r) \equiv \frac{\sum_{n=1}^{N_\epsilon} f(r, \epsilon_n) (\epsilon_n - \epsilon_{\text{ana}}(r))^2 d\epsilon_n}{(\epsilon_{\text{ana}}(r))^2 \sum_{n=1}^{N_\epsilon} f(r, \epsilon_n) d\epsilon_n}$$

deviation は resolutionの
一次に比例

**1st-order resolution
convergence**

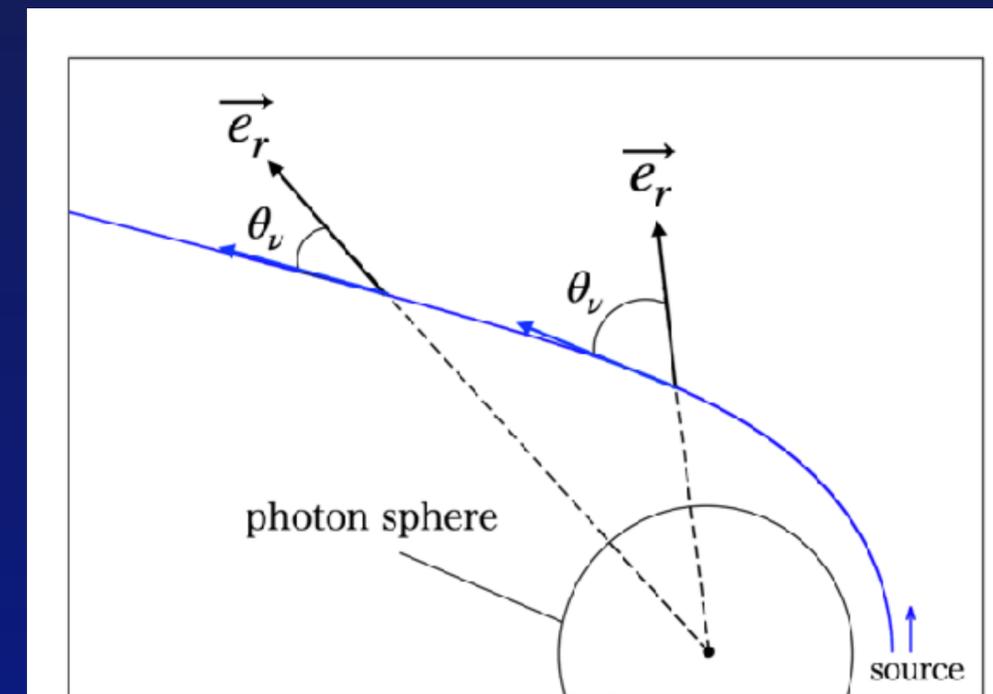
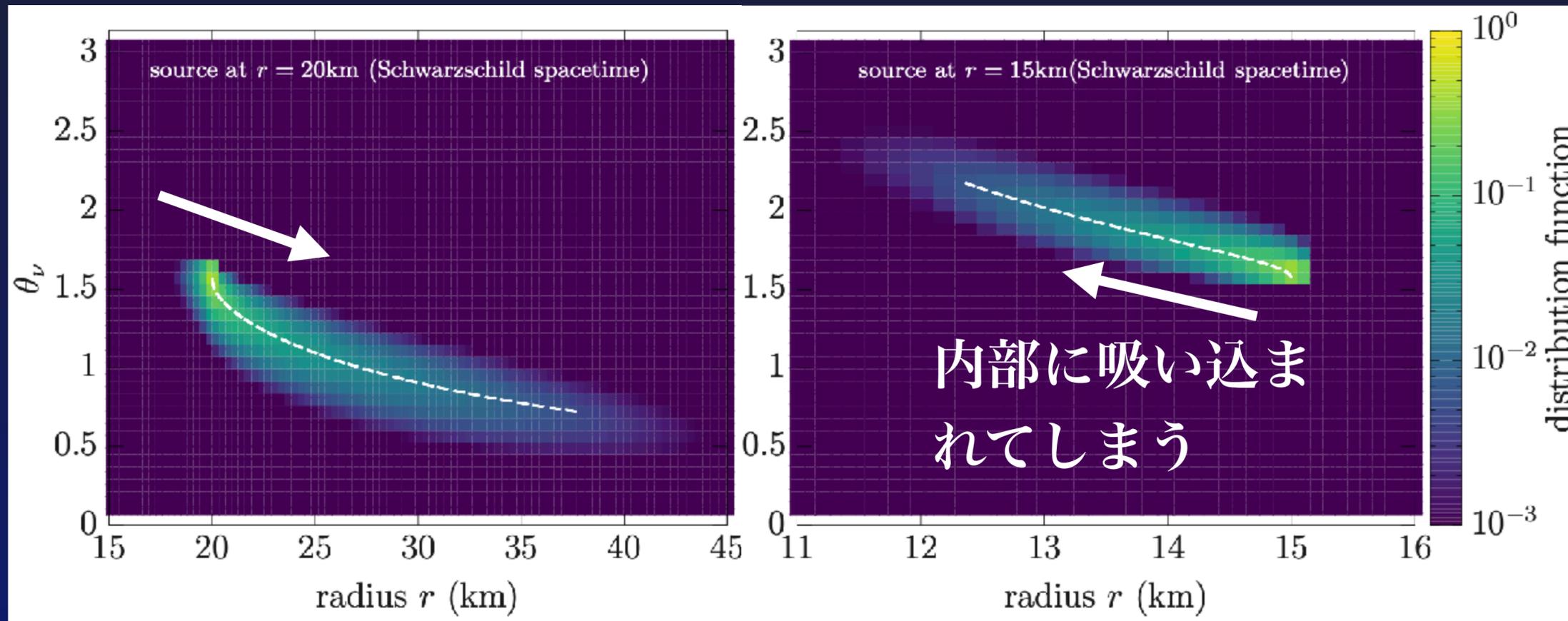


テスト計算: 運動量移流

運動量空間は極座標で記述されるため、運動量移流はその向き θ_ν の変化で表される

photon sphere 外部

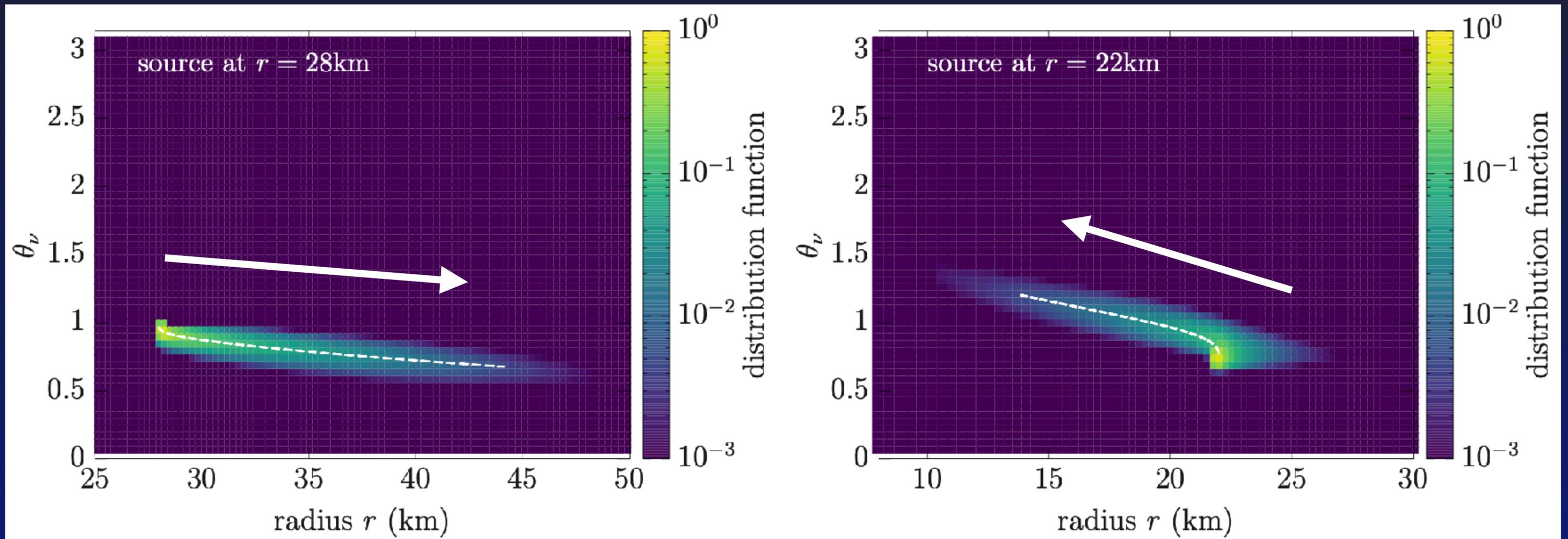
photon sphere 内部



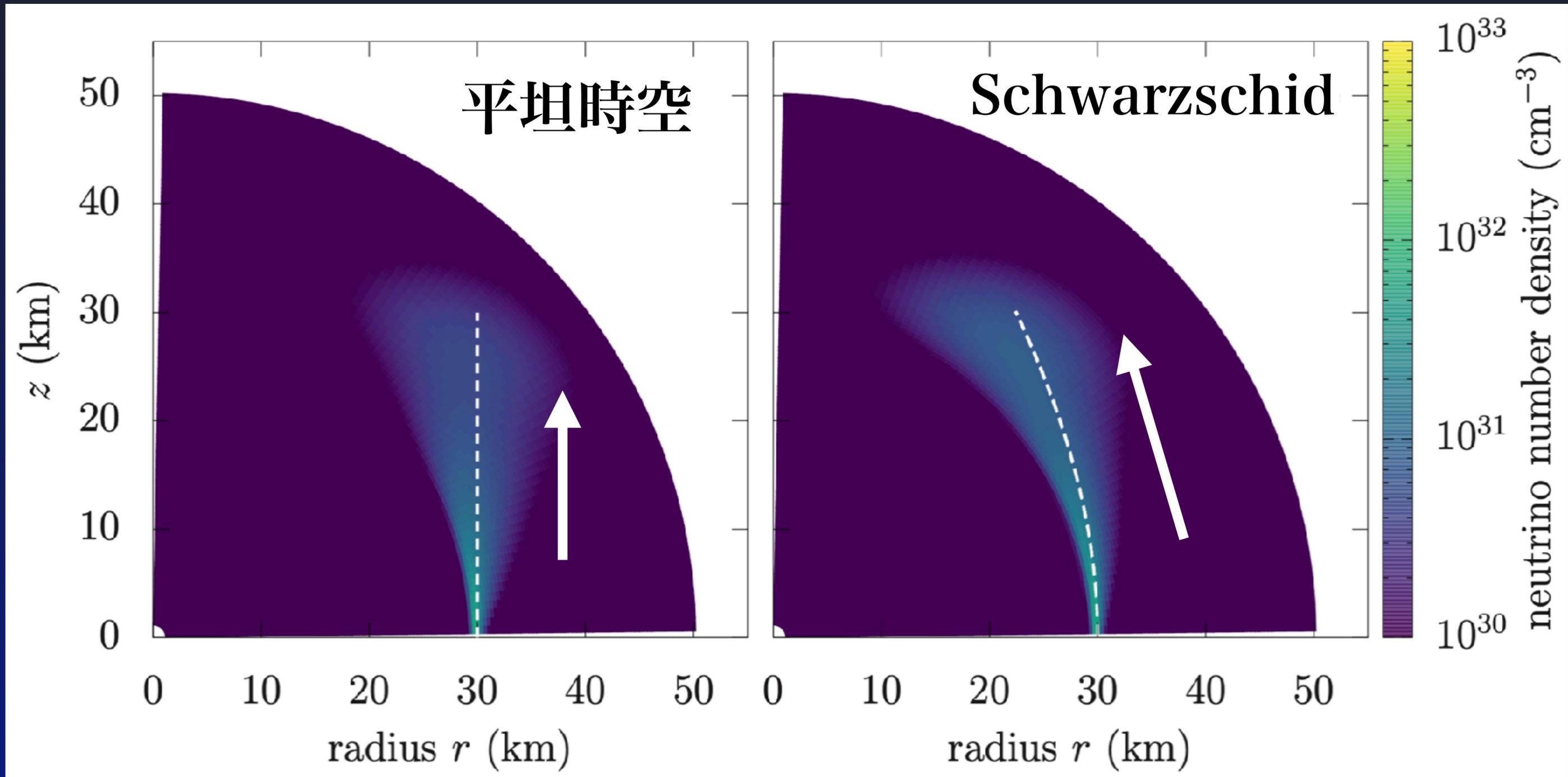
テスト計算: 運動量移流 (Kerr 時空)

photon sphere 外部

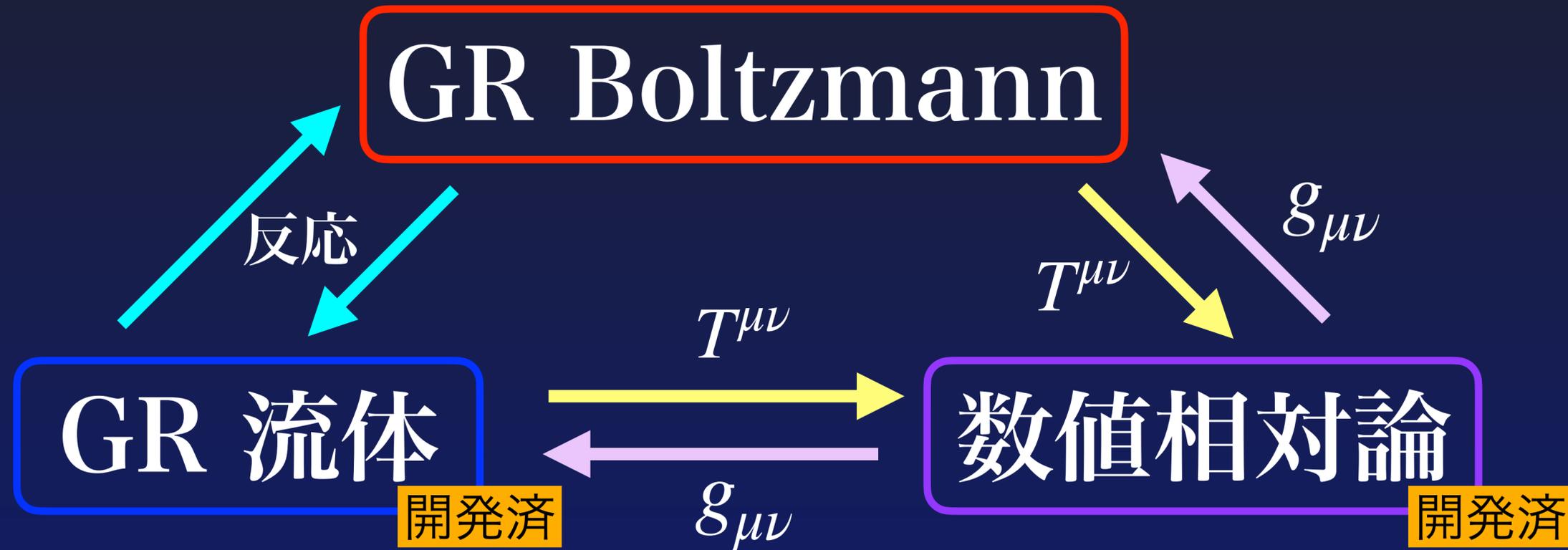
photon sphere 内部



テスト計算: 測地線湾曲



今後の展望



Targets:

大質量星の重力崩壊およびその後のPNS cooling
BNS merger