

暗黒物質直接探索のための放射線物性セミナー2025

月出 章

第3回

3. 重粒子の阻止能

3.1. 荷電粒子と原子の衝突 摂動論

3.2. 高速重粒子の阻止能 Betheの式

3.3. 高速重粒子の阻止能 Betheの式の拡張

3.4. 重粒子の飛跡構造 I

質問は声でお願いします

内容 (仮)

1. 序論

1.1. 阻止能と断面積

1.2. 重粒子の阻止能 古典論

1.3. 光吸収断面積と振動子強度

2. 原子模型

2.1. 電子ガス

2.2. Thomas-Fermi 模型

3. 重粒子の阻止能

3.1. 荷電粒子と原子の衝突 摂動論

3.2. 高速重粒子の阻止能 Betheの式

3.3. 高速重粒子の阻止能 Betheの式の拡張

3.4. 重粒子の飛跡構造 I

4. 低速重粒子

4.1 核的阻止能 Rutherford 散乱

4.2 電子的阻止能 誘電応答 (Lindhard理論)

4.3 MO理論

5. W値と energy balance

5.1 気体と凝縮相

5.2 高速粒子と低速粒子

5.3 Penning電離 一重項と三重項

文献

U. Fano, Annu. Rev. Nucl. Sci. 13, 1-66 (1963).

渡部力 本, 題不明,

A. Mozumder, *Fundamentals of Radiation Chemistry*.
(Academic, San Diego, 1999).

3. 重粒子の阻止能

3.1. 荷電粒子と原子の衝突 摂動論 -1

衝突の問題は散乱波がどのような確率で起こるか。

入射波 e^{ikr} 散乱波 $f_n(\theta) e^{ik_n r}/r$ $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + H_0 + H_1 \right) \Psi = E \Psi$$

$$H_0 \phi_n = E_n \phi_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$H_1 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \sum_{j=1}^{Z_2} \frac{Z_1 e^2}{|r - r_j|}$$

r : 入射粒子の座標
 r_j : 軌道電子の座標
 標的原子の位置を原点

全系の波動関数 Ψ を標的原子の波動関数 ϕ_n で展開する。

$$\Psi = \sum_n \phi_n(r_1, r_2, \dots, r_n) F_n(r)$$

$$(\nabla^2 + k_n^2) F_n(r) = \sum_{m=0}^{\infty} U_{nm} F_m(r)$$

$$\text{ただし } k_n^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (E - E_0)$$

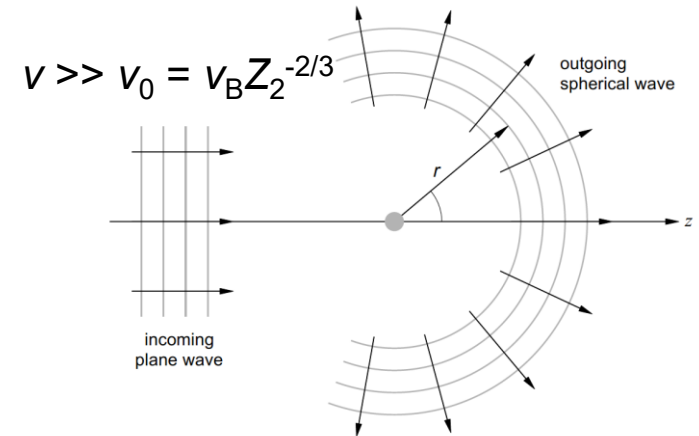
連立方程式

$$U_{nm} \square (2M / \hbar^2) < \phi_n | H_1 | \phi_m >$$

漸近形 (r 大)

$$F_0 \sim e^{ikz} + f_0(\theta) e^{ikr}/r$$

$$F_n \sim f_n(\theta) e^{ik_n r}/r \quad (n \neq 0)$$



中心力場 入射波: e^{ikz}

散乱波 遠方での漸近形

$$e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ik'r}$$

散乱振幅

微分断面積

$$\sigma(\theta) d\Omega = \frac{k'}{k} |f(\theta)|^2 d\Omega$$

3.1. 荷電粒子と原子の衝突 摂動論 -2

摂動論

Born 近似 入射粒子のエネルギーが十分に大きい近似 散乱は少ない。

F_n : $F_0 = e^{ikz}$ が大部分、他は $|F_n| \ll 1$ 。

$$(\nabla^2 + k_n^2) F_n = U_{n0} e^{ik_n r} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{各 } F_n \text{ について独立}$$

$$\sigma(\theta) = \frac{k_n}{k} |f(\theta)|^2 = \frac{k_n}{(4\pi)^2 k} \left| \int e^{i(k-k_n)r'} U_{n0}(r') dr' \right|^2 \quad \text{ただし、}$$

$k_0 = k$, $\sigma_0(\theta)$ は弾性散乱。

非弾性散乱

3.2. 高速重粒子の阻止能 Betheの式 -1

入射粒子の運動エネルギーに対して衝突のポテンシャルが摂動とみなせるほど小さい

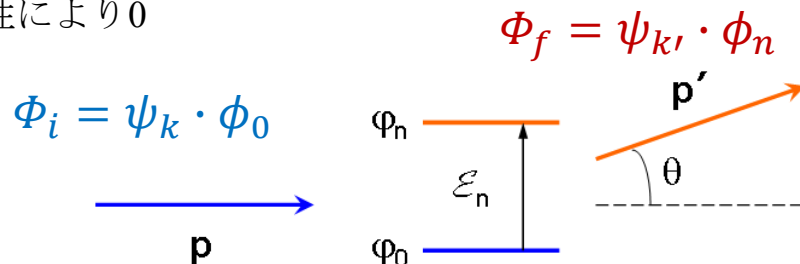
$$U(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \sum_{j=1}^{Z_2} \frac{Z_1 e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \quad (2.18) \quad U(r) \text{の第1項は電子座標を含まない} \\ (5.2) \quad \Rightarrow \text{直交性により0}$$

標的核から見た r : 入射粒子 r_i : 電子

摂動 H' による Φ_i から Φ_f への遷移確率 $d\omega$ は

$$d\omega = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \Phi_i | H' | \Phi_j \rangle \right|^2 \delta(E_i - E_j) d\nu \quad (2.19) \\ \text{黄金則} \\ d\nu: \text{状態数}$$

$$d\omega_n = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_k \cdot \phi_0 | U(r) | \psi_{k'} \cdot \phi_n \rangle|^2 \delta \left(\frac{p' - p}{2m_e \hbar^2} + E_n - E_0 \right) d\nu \quad (2.20)$$



高速荷電粒子の非弾性衝突

$$p = \hbar k$$

$$d\sigma_n = \frac{m_e^2}{4\pi^2 \hbar^4} \frac{p'}{p} |\langle \phi_n | U(r) e^{ikr} | \phi_0 \rangle|^2 d\Omega \quad (2.23) \\ (5.1)$$

エネルギーと運動量の保存

$$\frac{p^2 - p'^2}{2m} = E_n - E_0 \equiv \epsilon_n \quad (5.9)$$

$$q^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta \quad (5.10)$$

$$d(q^2) = 2pp' \sin \theta d\theta = \frac{pp'}{\pi} d\Omega$$

非弾性衝突の断面積

非弾性散乱構造因子

$$d\sigma_n = \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \frac{dQ}{Q^2} |F_n(q)|^2 \quad (5.14)$$

Rutherford 散乱
の断面積

$$F_n(Q) = \sum_j \langle \phi_n | e^{ikr_j} | \phi_0 \rangle$$

Born 近似は以前考えられていたより
低いエネルギー領域まで適用できる。
I. Shimamura

3.2. 高速重粒子の阻止能 Betheの式 -2

$$S = -\frac{dE}{dx} = N \sum_n \int E_n d\sigma_n$$

$$d\sigma_n = \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \frac{dQ}{Q^2} |F_n(q)|^2$$

衝突による運動量の変化

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$$

$$q^2 = E_n^2/v^2 + p^2\theta^2$$

$$Q = \frac{q^2}{2m_e}$$

$$\frac{p^2 - p'^2}{2p} + \frac{q^2}{2p} \sim p - p' \sim \frac{dp}{dE} E_n = \frac{E_n}{v}$$

$$Q = \frac{E_n^2}{2m_e v^2} + p^2\theta^2$$

Q は $\theta=1$ のときに最小値

$$Q_{\min} = \frac{\varepsilon_n^2}{2m_e v^2}$$

電子が束縛されていると
 Q と ε_n が異なるがことも。

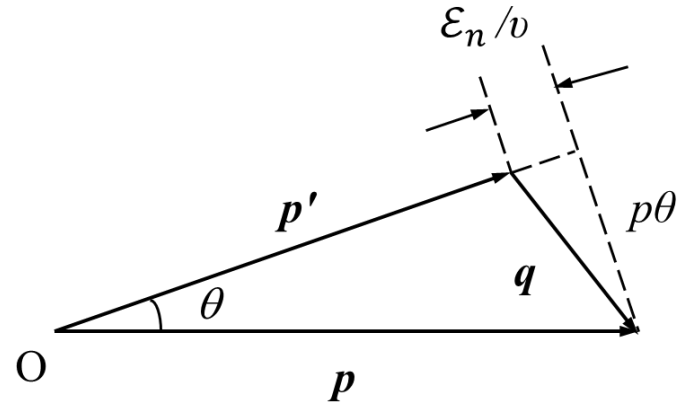
核のとり得ると運動量
 $\approx$ 軌道電子の運動量

その二乗は
 $\sim 2m_e <\varepsilon_I>$

$<\varepsilon_I>$: 平均束縛エネルギー

高 Q 領域 $Q > Q_1$

$$<\varepsilon_I> \ll \varepsilon_n \ll 2m_e v^2$$



注) 図7.1 の q は波数 (本文 運動量)
 p, p' の長さが逆。

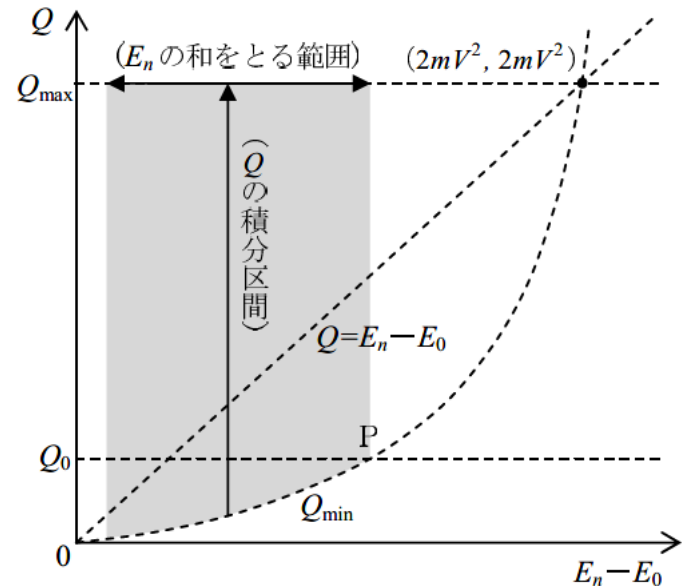


図 29: (187) の Q の積分区間,
および E_n の和をとる範囲

3.2. 高速重粒子の阻止能 Betheの式 -3

$$S = -\frac{dE}{dx} = N \sum_n \int E_n d\sigma_n$$

Born 近似より

$$d\sigma_n = \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \frac{dQ}{Q^2} |F_n(Q)|^2 \quad (5.14) \quad F_n(Q) = \sum_j \langle \Phi_n | e^{ikr_j} | \Phi_0 \rangle$$

高 Q 領域

$Q > Q_1$ の領域は ϵ_n の積分を
0 から ∞ まで取ることができる。

$$\langle \epsilon_I \rangle \ll \epsilon_n \ll 2m_e v^2$$

“free electron”

$$p_0 = 0, p_n = q$$

$$\begin{aligned} \sum_n E_n d\sigma_n &= \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \sum_n \left[\frac{E_n}{Q} |F_n(Q)|^2 \right] \frac{dQ}{Q} \\ &= \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} Z_2 \frac{dQ}{Q} \quad Z_2 \quad (7.25) \end{aligned}$$

一般化振動子強度

$$f_n(Q) = \frac{E_n}{Q} |F_n(Q)|^2 \quad (5.16)$$

$$\sum_n f_n(Q) = Z \quad (5.18)$$

$$\int_{Q_1}^{Q_{max}} \sum_n E_n d\sigma_n = \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} Z_2 \left(\ln \frac{2m_e v^2}{Q_1} \right) \quad (7.26)$$

$$Q_{max} = 2m_e v^2$$

3.2. 高速重粒子の阻止能 Betheの式 -4

$$S = -\frac{dE}{dx} = N \sum_n \int E_n d\sigma_n \quad d\sigma_n = \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \frac{dQ}{Q^2} |F_n(q)|^2 \quad F_n(Q) = \sum_j \langle \Phi_n | e^{ikr_j} | \Phi_0 \rangle$$

低 Q 領域 ϵ_n の積分の上限が Q_1 の関数になる。

$e^{ikr_i} \approx 1 + ikr_i$ 双極子近似 (光学近似)

$$|F_n(q)|^2 = q^2 |\langle \phi_n | r_i | \phi_0 \rangle|^2 = \frac{q^2}{e^2} |\langle \phi_n | e r_i | \phi_0 \rangle|^2 \quad |F_n(q)|^2 = \frac{Q}{\epsilon_n} f_n$$

遷移双極子モーメント

$$\epsilon_n d\sigma_n = \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \frac{\overset{f_n}{\epsilon_n}}{Q} |F_n(q)|^2 \frac{dQ}{Q} = \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} f_n \frac{dQ}{Q}$$

$$\int_{Q_{min}}^{Q_1} \epsilon_n d\sigma_n = \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} f_n \left(\ln \frac{Q_1 2m_e v^2}{\epsilon_n^2} \right)$$

$$Q_{min} = \frac{\epsilon_n^2}{2m_e v^2}$$

3.2. 高速重粒子の阻止能 Betheの式 -5

$$S = -\frac{dE}{dx} = N \sum_n \int E_n d\sigma_n = \sum_n E_n \int_{Q_{min}}^{Q_1} d\sigma_n + \int_{Q_1}^{Q_{max}} \sum_n E_n d\sigma_n$$

遠隔衝突 近接衝突

$$= \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \left\{ \sum_n^{Z_2} f_n \ln \left(\frac{Q_1 2m_e v^2}{\varepsilon_n^2} \right) + Z_2 \ln \left(\frac{2m_e v^2}{Q_1} \right) \right\} \quad (7.26 \text{ \& } 32)$$

$$Q = \frac{q^2}{2m_e} = \frac{E_n^2}{2m_e v^2} + p^2 \theta^2$$

$$Q_{min} = \frac{E_n^2}{2m_e v^2}$$

$$Q_{max} = 2m_e v^2 \approx \frac{4m_e}{M} E$$

一緒に計算すると
 Q_1 が消える。

Bethe の阻止能公式

$$S = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} N Z_2 \left(\ln \frac{2m_e v^2}{\bar{I}} \right)$$

$$\ln \bar{I} = \sum_n \ln \varepsilon_n$$

($\bar{I}$: 平均励起エネルギー)

(気体と凝縮相の差はほとんどない)

$$\bar{I} = K Z_2, \quad (K \approx 10 \text{ eV})$$

遠隔衝突の寄与と近接衝突の寄与がほぼ 1;1
equipartition

3.3.高速重粒子の阻止能 Betheの式の拡張 -1

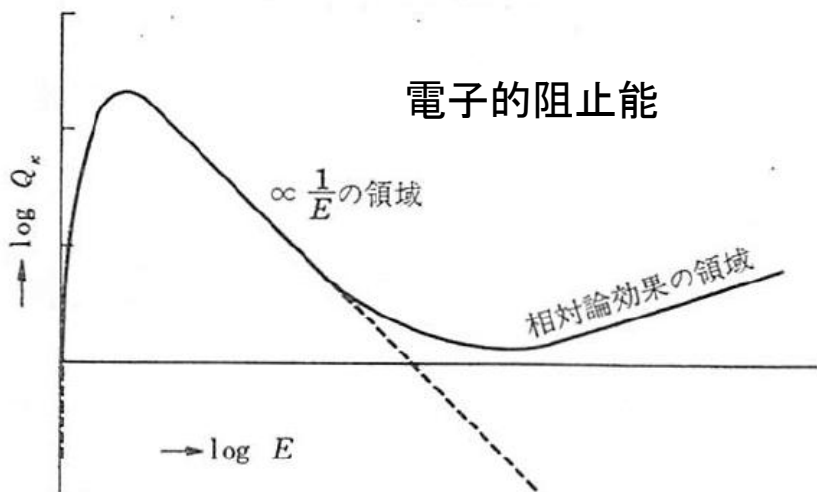


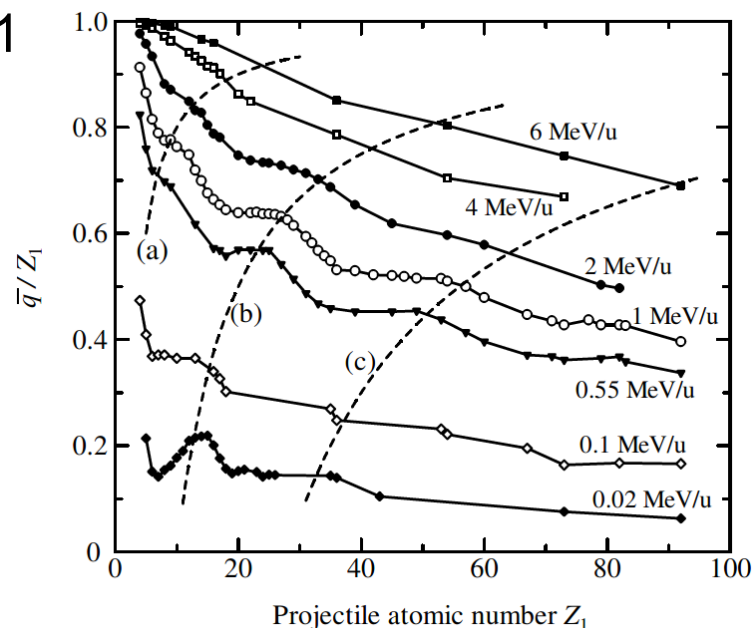
図 2.22 Q_n の入射エネルギー依存性 (相対論効果を入れたもの)

$$S_T = S_e + S_n + S_r$$

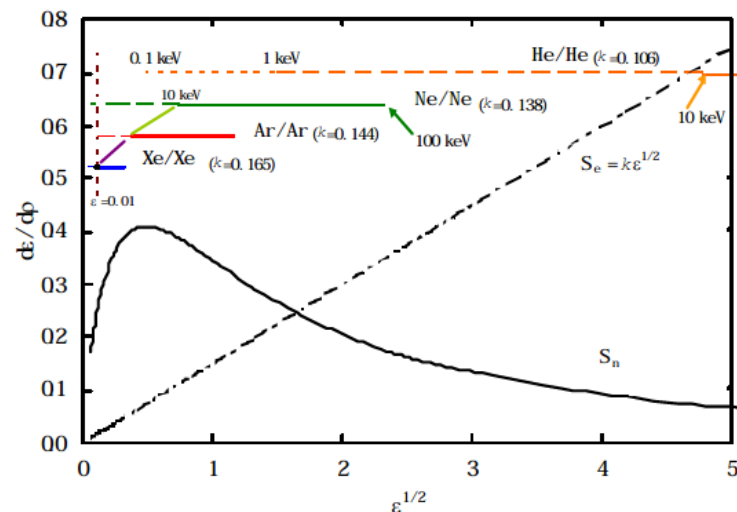
S_e : 電子的阻止能 電子励起 (電離を含む)

S_n : 核的阻止能 散乱 低速

S_r : 輻射的阻止能 チェレンコフ・制動輻射
高速



カーボン通過時の平均電荷



低速荷電粒子の阻止能

3.3.高速重粒子の阻止能 Betheの式の拡張 -2

電子的阻止能

全補正を含めた阻止能公式

Bethe

密度効果

$$S_e = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} N B = \underbrace{\frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} N Z_2 \left(\ln \frac{2m_e v^2}{I} + \ln \frac{1}{1-\beta^2} - \beta^2 \right)}_{\text{Bethe-Bloch}} \underbrace{\left(\frac{C}{Z_2} \right)}_{\text{内殻補正}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \delta \right)}_{\text{密度効果}}$$

B : the stopping number

Bethe-Bloch

内殻補正

Betheの公式は入射粒子の速度が軌道電子の速度より大きい必要がある。
その分の補正。まず、K殻、次にL殻。

相対論効果 入射粒子の速度が相対論的速度になると

最大エネルギー移行が $2mv^2$ から $2mv^2/(1-\beta^2)$ に増加する効果。

電磁相互作用も考慮する必要がある。

密度効果 入射粒子の速度が相対論的速度になると

物質中の電子の分極による遮蔽効果が相互用を弱める（凝縮相）。

有効電荷 Z_{eff} 入射粒子は物質との電子の損失・捕獲により、その速度により決まる電荷分布となる。平衡電荷。半経験式が与えられている。

$$Z_{\text{eff}} = Z_1 \left[1 - \exp \left(- \frac{C_Z v}{Z_1^{2/3}} \right) \right]$$

3.3.高速重粒子の阻止能 Betheの式の拡張 -3

相対論的粒子

$$S = -\frac{dE}{dx} = N \sum_n \int E_n d\sigma_n = \sum_n E_n \int_{Q_{min}}^{Q_1} d\sigma_n + \int_{Q_1}^{Q_{max}} \sum_n E_n d\sigma_n$$

$Q_{max} = 2m_e v^2 / (1 - v^2/c^2)$ 等の相対論的効果を入れると

$$\sum_n E_n \int_{Q_{min}}^{Q_1} d\sigma_n = \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} \sum_n f_n \left(\ln \frac{Q_1}{E_n^2 / 2 m_e v^2} + \ln \frac{1}{1 - \beta^2} - \beta^2 \right) \quad \text{遠隔衝突}$$

$$\int_{Q_1}^{Q_{max}} \sum_n E_n d\sigma_n = \frac{2\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} Z_2 \left(\ln \frac{2m_e v^2}{Q_1} + \ln \frac{1}{1 - \beta^2} - \beta^2 \right) \quad \text{近接衝突}$$

Bethe-Bloch の阻止能公式

$$-\frac{dE}{dx} = N \sum_n E_{ni} \int_{Q_{min}}^{Q_{max}} d\sigma_n = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} N Z_2 \left(\ln \frac{2m_e v^2}{\bar{I}} + \ln \frac{1}{1 - \beta^2} - \beta^2 \right)$$

3.3. 高速重粒子の阻止能 Betheの式の拡張 -4

Density effect

The polarization screening of one medium electron by another reduced the interaction slightly at high velocities. (for the condensed phase)

$\beta \rightarrow 0$ で $S \rightarrow \infty$ になるのを修正

$$S = \frac{4\pi Z_1^2 e^4}{m_e v^2} N Z_2 \left(\ln \frac{2m_e v^2}{\bar{I}} + \ln \frac{1}{1 - \beta^2} - \beta^2 - \frac{C}{Z} - \frac{\delta}{2} \right)$$

$$\delta = \ln \frac{\hbar^2 \omega_p^2}{\bar{I}(1 - \beta^2)} - 1 \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}} \text{ the plasma frequency}$$

track core の半径

$$r_0 = \lambda \beta$$

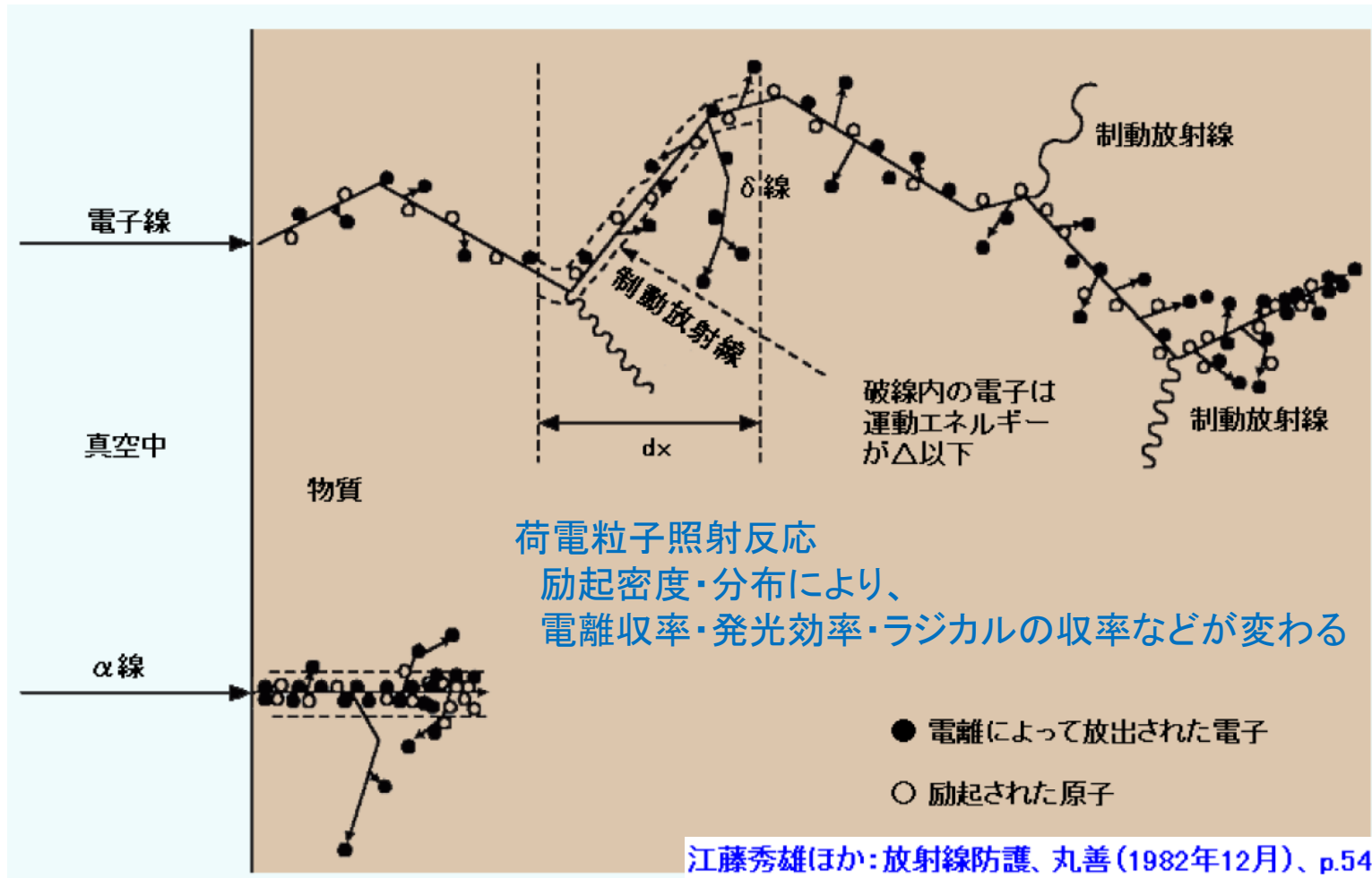
$$\lambda = \chi_{max} c / \omega_0 \epsilon^{1/2}$$

$\hbar \omega_0$; a typical excitation energy.

$$\chi_{max} = 1.074$$

3.4. 重粒子の飛跡構造 I -1

荷電粒子によるエネルギー付与



月・惑星旅行では高エネルギー粒子線により、飛程が長く高密度の励起となる。
地球磁場の遮蔽がない

3.4. 重粒子の飛跡構造 I-2

重イオンの飛跡は密度の高い芯部と周辺の密度の低いペナンプラからなる円柱構造。

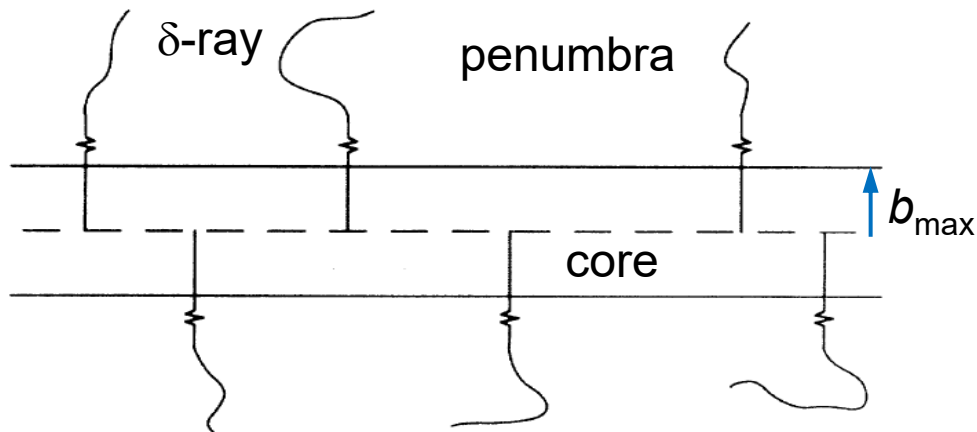
入射粒子のエネルギーは、まず芯部と周辺部に均等に配分される。(衝突理論, equipartition)
芯部には δ 線のエネルギーの一部が加わる。

$$T = T_c + T_p$$

半径 r の円筒内に付与されるエネルギーの割合

$$F = 0.5 + \frac{1 + 2 \ln(r / r_c)}{4 \ln(\sqrt{e} r_p / r_c)} \quad r_c < r \leq r_p$$

相対論的粒子では, $T_c/T \approx 0.5$



芯部の半径 $b_{\max}$ は Bohr's impulse principle によって与えられる

$$\frac{2b_{\max}}{v} \cdot E_1 \geq \hbar \quad (\beta \ll 1)$$

v : 入射粒子の速度

E_1 : 最低励起状態のエネルギー.

相対論的粒子

$$r_0 = \lambda \beta$$

$$\lambda = \chi_{\max} c / \omega_0 \epsilon^{1/2}$$

反跳イオン,

$$T_c/T = 1$$

$b_{\max} \approx a_0$: 原子間距離

3.4. 重粒子の飛跡構造 I -3

お約束

r_c, r_p の値は入射時の速度から求める。
エネルギーを MeV/n で表わせばすべての
入射粒子に対して使える。

$$r_c = r_B = \hbar v / 2E_1$$

物質により、プラズマ振動数 ω_p を用いる

$$r_c = \frac{\beta c}{\omega_p} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m^* \cdot 0}}$$

δ 線は垂直方向に。 δ 線内の線量は一定。

r_p : 最大エネルギーの δ 線飛程

δ 線の: 最大エネルギーは

$$4m_e E / M$$

コンピュータの能力で制限されていた。

表 1 粒子電荷に依存しない飛跡パラメータ

水

エネルギー (MeV/n)	β	$r_c(\text{\AA})$	$r_p(\text{\AA})$	$\varepsilon_{\max}(\text{eV})$	λ
1,000	0.876	90.16	2.7×10^6	3.4×10^6	23.42
800	0.843	86.75	2.4×10^6	2.5×10^6	22.46
600	0.794	81.69	2.1×10^6	1.7×10^6	22.31
400	0.715	73.54	1.6×10^6	1.1×10^6	21.98
200	0.568	58.43	8.4×10^5	4.9×10^5	21.15
100	0.430	44.21	3.9×10^5	2.3×10^5	20.17
80	0.390	40.12	3.0×10^5	1.8×10^5	19.84
60	0.343	35.26	2.1×10^5	1.4×10^5	19.38
40	0.284	29.23	1.3×10^5	0.9×10^5	18.80
20	0.204	20.99	5.3×10^4	4.4×10^4	17.67
10	0.145	14.96	2.1×10^4	2.2×10^4	16.49
8	0.130	13.40	1.6×10^4	1.8×10^4	16.17
6	0.113	11.63	1.1×10^4	1.3×10^4	15.70
4	0.092	9.51	6.2×10^3	8.8×10^3	14.96
2	0.065	6.73	2.4×10^3	4.4×10^3	13.75
1	0.046	4.77	9.6×10^2	2.2×10^3	12.61
0.8	0.041	4.26	7.1×10^2	1.8×10^3	12.23
0.6	0.036	3.69	4.8×10^2	1.3×10^3	11.74
0.4	0.029	3.02	2.8×10^2	8.8×10^2	11.06
0.2	0.021	2.13	1.1×10^2	4.4×10^2	9.89
0.1	0.015	1.51	4.3×10^1	2.2×10^2	8.70

3.4. 重粒子の飛跡構造 I -4

動径方向の線量分布

一般的な飛跡モデル (Chatterjee & Shaefer)

直接励起 遠隔衝突

$$D_g = \frac{LET/2}{2\pi r_c^2} \quad r \leq r_c$$

δ 線による寄与 近接衝突

$$D_k = \frac{LET/2}{2\pi r_c^2 \ln(\sqrt{e}r_p/r_c)} \quad r \leq r_c$$

$$D_k = \frac{LET/2}{2\pi r^2 \ln(\sqrt{e}r_p/r_c)} \quad r_c < r \leq r_p$$

芯部では一定 (計算上の便宜)

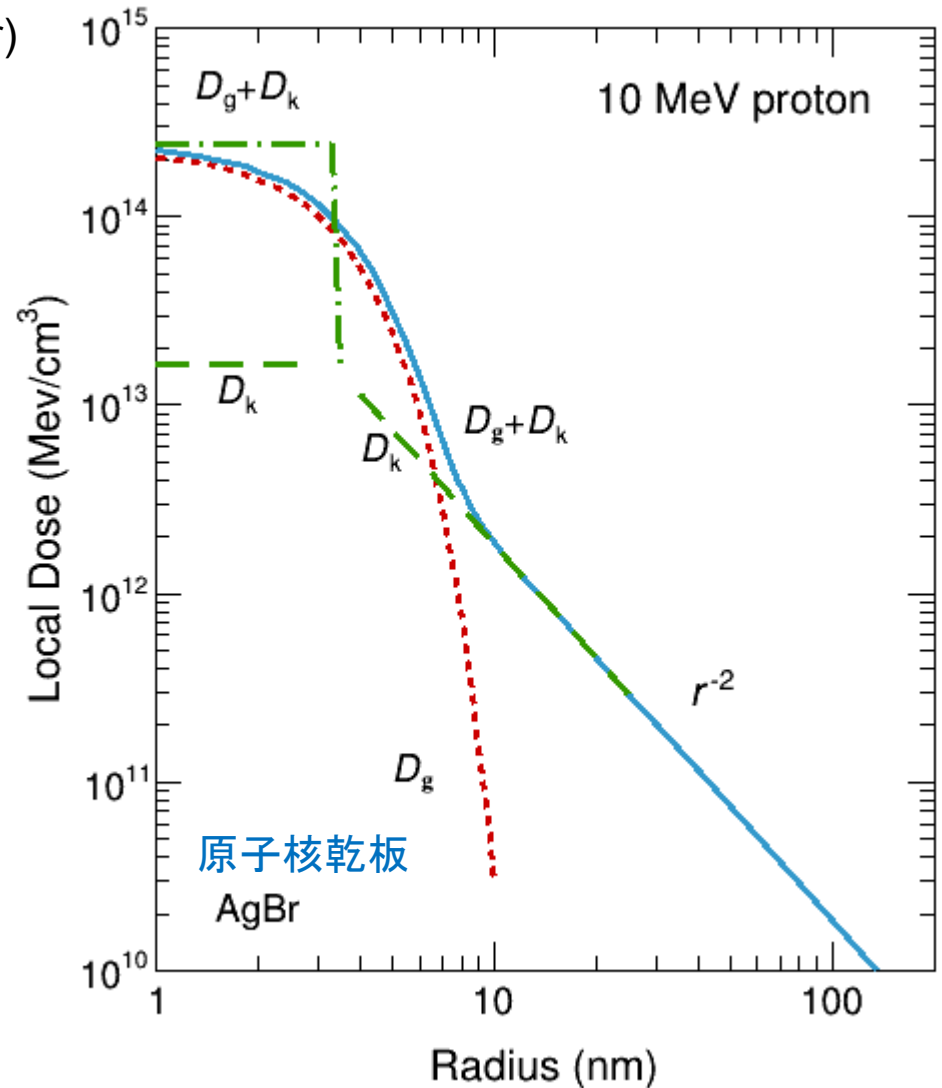
δ 線は垂直方向に。 δ 線内の線量は一定。

r_p : 最大エネルギーの δ 線飛程

改良モデル 直接励起 ガウス型

$$D_g = \frac{LET/2}{\pi a_0^2} \exp(-r^2/a_0^2) \quad r \leq r_c$$

反応の計算に便利



ペナブラについてはより詳しい理論や測定がある。

3.4. 重粒子の飛跡構造 I -5

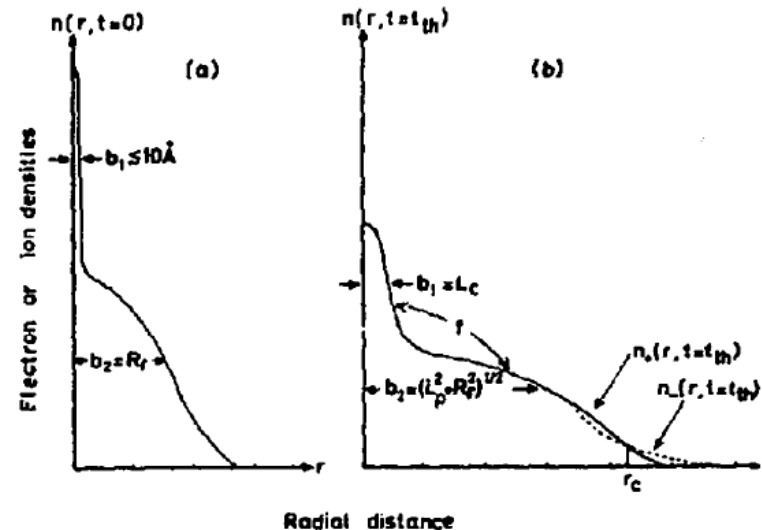
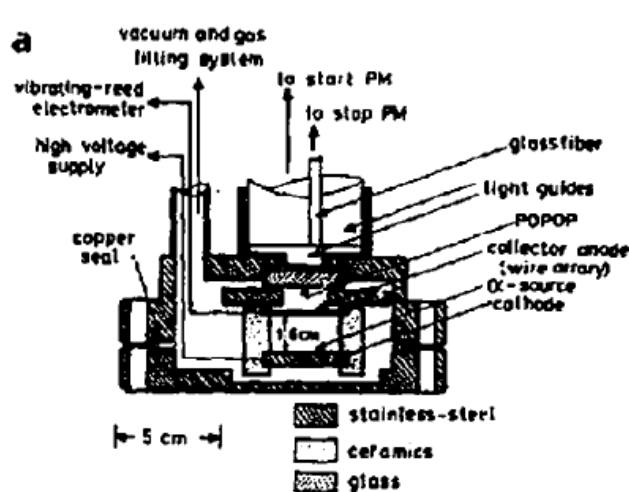
測定

penumbraのdoseの r 分布については大野等の測定がある。
 r^{-2} から多少ずれている。

core を含めたものは下記のみ。

RECOMBINATION LUMINESCENCE FROM IONIZATION TRACKS PRODUCED BY ALPHA PARTICLES IN HIGH PRESSURE ARGON, KRYPTON AND XENON GASES

Masayo Suzuki, NIM 215, 345-356 (1983).



The time dependence of recombination luminescence as a function of the pressure and of the applied electric field
 The ionization current and luminescence intensity have also been measured in these gases.

付録 数値

Bohr

$$v_B = e^2/\hbar = c/137 \approx 2.2 \times 10^8 \text{ cm/s}$$

$$v_{TF} \approx 0.688 \cdot v_B \cdot Z^{2/3} \quad \text{多電子原子中の電子の平均速度}$$

$$a_B = 0.529 \text{ \AA} \quad (= 0.0529 \text{ nm})$$

$$R_\infty = e^2/2a_B = 13.6 \text{ eV}$$

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}$$

$$m_u = 931 \text{ MeV} \quad (\text{原子質量定数})$$

$$\alpha = 1/137 \quad (\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c : \text{微細構造定数})$$

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV s}$$

$$1 \text{ eV} = 11,605 \text{ K}$$

ドブロイの関係式 $p = \hbar k$

$$E = h\nu \quad E = \hbar\omega$$

$$p = h/\lambda$$