

‘t Hooft Polyakov monopole による 電弱 monopole の UV completion

宮 福太朗 大阪大学

共同研究者: 佐藤 亮介氏、嶋守 聡一郎氏

地下稀事象 2月12日(木)

内容

- 磁気モノポール研究の背景と課題
- 磁気モノポールの理論的レビュー
- 研究の話

内容

- 磁気モノポール研究の背景と課題
- 磁気モノポールの理論的レビュー
- 研究の話

磁気モノポールの現象論

標準模型 + 磁気モノポール = 標準模型を超えた理論

- ダークマターの候補
Dark Sector由来の 't Hooft-Polyakovモノポールが暗黒物質残存量に寄与する
V.V. Khoze & G. Ro (2014).
Yang Bai et al. (2014).
S. Baek et al. (2020)...
- アクシオンとの物理
Witten 効果を通じたアクシオン質量への寄与
M. Kawasaki et al. (2016).
A. Banerjee & M.A. Buen-Abad(2025)...
- UHECRの起源
(超高エネルギー宇宙線)
 10^{18} eV 以上の宇宙線
モノポールの対消滅や加速されたモノポール由来の輻射
E. Huguet & P. Peter (2000)
Ł. Bratek & J. Jałocha (2025)...

そもそも標準模型の中にモノポールがあるか？

標準模型の課題と本研究の目的

標準模型の中に Cho-Maison^[1] モノポールが**存在する**
(電弱セクターで構成される電弱モノポール)

エネルギーが空間原点で発散している

$$E_0 \propto \int_L^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$\frac{1}{L}$: カットオフスケール

$E > \frac{1}{L}$ の領域で標準模型は不適 = 標準模型は不完全

➡ Cho-Maisonモノポールの**高エネルギーでの理論**は?
= 標準模型の **UV completion** を知りたい

[1] Y. M. Cho & D. Maison (1996)

内容

- 磁気モノポール研究の背景と課題
- 磁気モノポールの理論的レビュー
 - 't Hooft-Polyakov モノポール
 - Cho-Maison モノポール
- 研究の話

't Hooft-Polyakov モノポール $SU(2) \rightarrow U(1)$

[1] G. 't Hooft (1974). [2] A. M. Polyakov (1974).

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2}(D^\mu\Phi)^a(D_\mu\Phi)^a - V(\Phi) \quad V(\Phi) = \frac{\lambda}{8}(\Phi^a\Phi^a - v^2)^2$$

随伴表現 $\Phi = \Phi^a \frac{\sigma^a}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Phi^3 & \Phi^1 - i\Phi^2 \\ \Phi^1 + i\Phi^2 & -\Phi^3 \end{pmatrix}$

Hedgehog 配位 (運動方程式の解) 境界条件 $|\Phi| \rightarrow \langle\Phi\rangle (r \rightarrow \infty)$

$$\Phi^a(x) = v_\Phi \chi(r) \frac{x^a}{r}, \quad A_0^a = 0, \quad A_i^a = \frac{1}{e}(1 - f(r))\varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

空間と場の回転が互いに相殺

$$\vec{K} = \vec{J} + \vec{I} = \vec{x} \times \frac{1}{i}\nabla + \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad [\vec{K}, \Phi(x)] = 0$$

$$[L_i, A_j^a] = i\varepsilon_{imn}x_m\partial_n A_j^a,$$

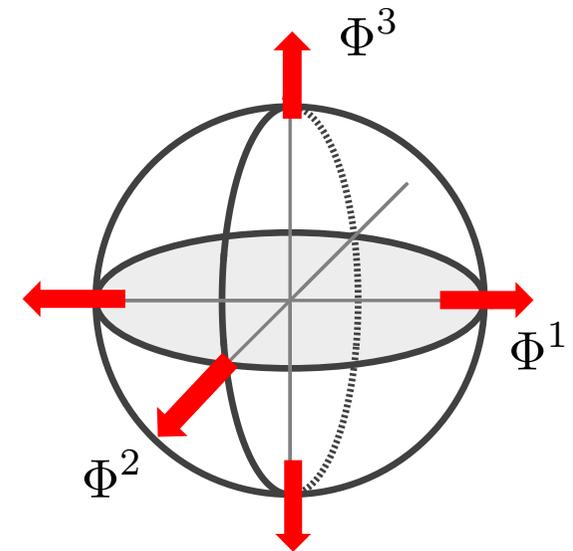
$$[S_i, A_j^a] = -i\varepsilon_{ijk}A_k^a,$$

$$[I_i, A_j^a] = -i\varepsilon_{iab}A_j^b,$$

$$K_i = L_i + S_i + I_i$$

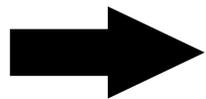
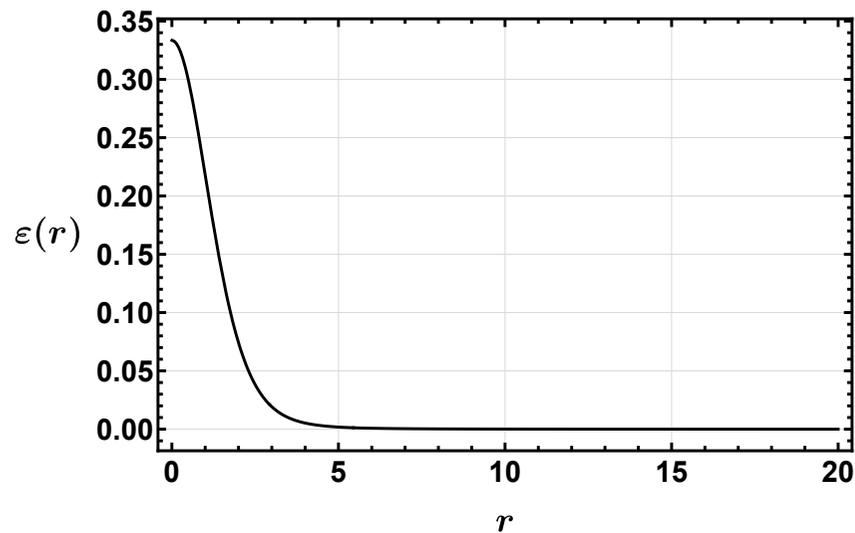
$$[K_i, A_j^a] = 0$$

正則かつ
球対称な配位

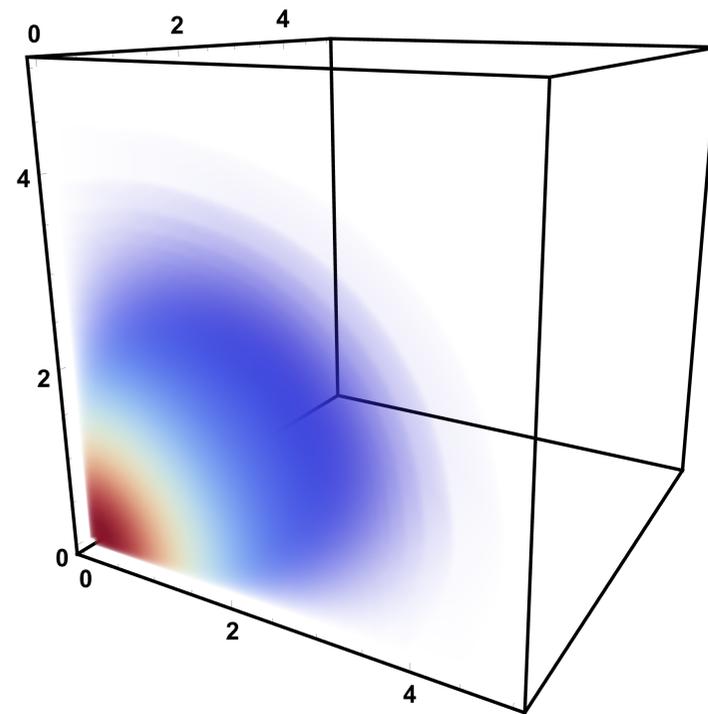


't Hooft-Polyakov モノポールのエネルギーの有限性

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a + \frac{1}{2} (D_i \Phi^a)(D_i \Phi^a) + V(\Phi) \right]$$



エネルギー有限



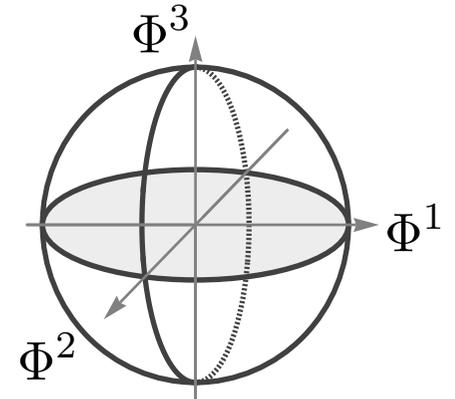
エネルギー密度3次元プロット

真空の構造

停留点条件 $\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow (\Phi^1)^2 + (\Phi^2)^2 + (\Phi^3)^2 = \frac{v^2}{2}$

$$\langle \Phi \rangle : S^2_\infty \rightarrow S^2_{\text{vacuum}}$$
$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$$

ホモトピーの非自明性が
安定性を保証する



$\pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}) \neq \{e\} \implies$ 't Hooft-Polyakov モノポールは存在する

$$\pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}^{\text{SM}}) = \pi_2(S^3) = \{e\}$$

\implies 't Hooft-Polyakov モノポール
は標準模型の中に存在しない

標準模型の中に他のモノポール存在しない？

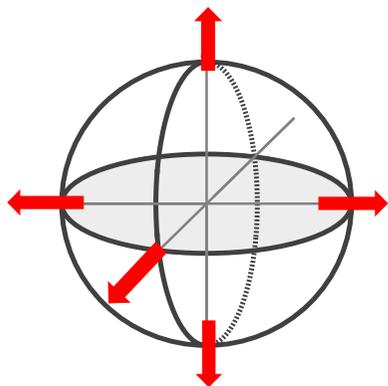
Cho-Maison モノポール $SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{EM}$

Hedgehog 配位

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho(r) \xi, \quad \xi = i \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) e^{-i\varphi} \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \text{この配位は } \theta = \pi \text{ で不定}$$

$$W_i^a = \frac{1}{g} [1 - f(r)] \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2} \quad \text{'t Hooft Polyakov モノポールと同じ配位}$$

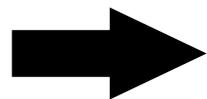
$$B_i = \frac{1}{g'} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0) \quad \text{Dirac モノポールと同じ配位 } \theta = \pi \text{ で不定}$$



$$E = E_0 + E_1$$

$$E_0 \propto \int_0^\infty \frac{dr}{r^2}$$

空間原点でエネルギー発散



高エネルギー領域での記述が不十分

解の存在性: [Y. Yang (2001)]

解の安定性: [R. Gervalle & M.S. Volkov (2022)]

- 't Hooft-Polyakov モノポール

$$SU(2) \rightarrow U(1)$$

- 正則な配位
- エネルギー有限

数学的な安定性

$$\langle \Phi \rangle : S^2_\infty \rightarrow S^2_{\text{vacuum}}$$

$$\Pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}) \neq \{e\}$$

- Cho-Maison モノポール

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{\text{EM}}$$

- 特異点を持つ配位
- 空間原点でエネルギー発散

標準模型内にはこの数学的条件を満たさないため、't HPモノポールは不在

$$\Pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}^{\text{SM}}) = \{e\}$$

UV completionのシナリオ

高エネルギーでは 't Hooft-Polyakov モノポール

低エネルギーでは Cho-Maison モノポール

➡ 我々の研究でこのシナリオを再現する具体的なモデルを調べた

内容

- 磁気モノポール研究の背景と課題
- 磁気モノポールの理論的レビュー
- 研究の話
 - Cho-MaisonモノポールのUV completion

Cho-Maison モノポールのUV Completion

● Pati-Salam 模型

$$SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$$

$$\downarrow \langle \Phi \rangle$$

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

$$\downarrow \langle H \rangle$$

$$SU(3)_C \times U(1)_{EM}$$

真空期待値の階層性

$$\langle \Phi \rangle \gg \langle H \rangle$$

J. C. Pati & A. Salam (1974).

't HP モノポールの存在条件

$$\Pi_2(G/H) = \mathbb{Z}$$

この低エネルギー有効理論ではCMモノポールのようになっている

確認したいこと

$H(x)$ が高エネルギー領域で 't HP モノポールのよう振る舞うこと

今からやる解析

- 解として Hedgehog 配位を仮定して、運動方程式を解く
- 空間座標に対する解の振る舞いをプロットして $H(x)$ の挙動を調べる

● Pati-Salam 模型

球対称な解を仮定して運動方程式を解く

$$V(H, \Phi) = -\mu_\Phi^2 \text{Tr} \Phi^\dagger \Phi - \mu_H^2 \text{Tr} H^\dagger H + \lambda_1 (\text{Tr} \Phi^\dagger \Phi)^2 + \lambda_2 \text{Tr} \Phi^\dagger \Phi \Phi^\dagger \Phi + \lambda_3 (\text{Tr} H^\dagger H)^2 + \lambda_4 \text{Tr} H^\dagger H H^\dagger H$$

Hedgehog 配位 $\hat{r}^a = \frac{x^a}{r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$

スカラー場

$$\Phi(4, 1, 2) \quad \Phi \rightarrow \Phi' = U_4 \Phi U_R^\dagger \quad \langle \Phi \rangle = v_\Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x) = v_\Phi \chi(r) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$H(1, 2, 2) \quad H \rightarrow H' = U_L H U_R^\dagger \quad \langle H \rangle = v_H \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(x) = v_H h(r) \left(1_2 + \frac{x^a \sigma^a}{r} \right) = v_H h(r) \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}$$

ゲージ場

$$G_{4i}^a = \frac{1}{g_4} (-f_4(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

$$W_{Ri}^a = \frac{1}{g_R} (-f_R(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

$$W_{Li}^a = \frac{1}{g_L} (-f_L(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

$$G_{40}^a = W_{L0}^a = W_{R0}^a = 0$$

$$\text{SU}(4)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$$

↓ $\langle \Phi \rangle$

$$\text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$$

↓ $\langle H \rangle$

$$\text{SU}(3)_C \times \text{U}(1)_{\text{EM}}$$

$$\langle \Phi \rangle \gg \langle H \rangle$$

● Pati-Salam 模型

運動方程式の解のプロット

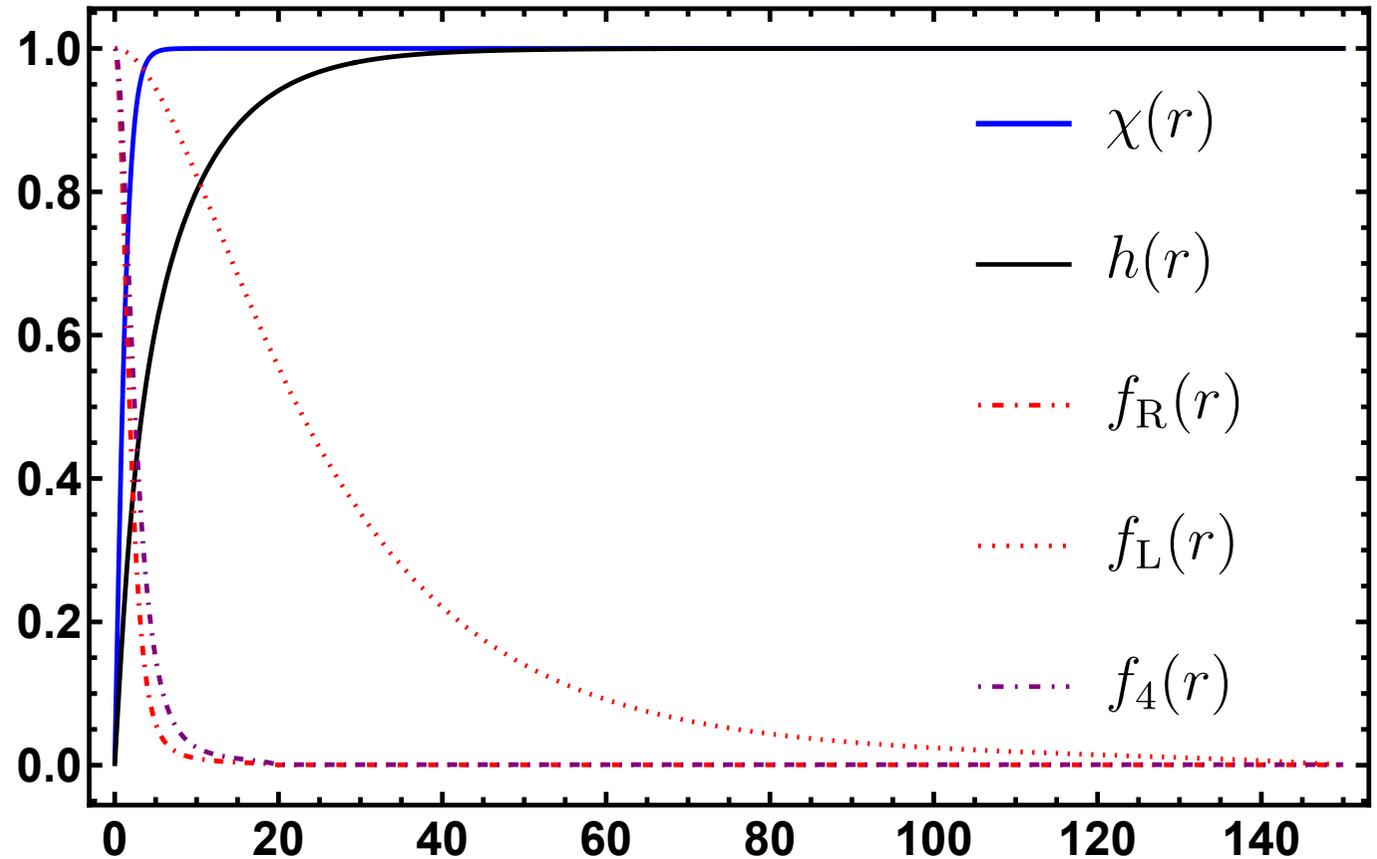
$$\Phi(x) = v_\Phi \chi(r) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$H(x) = v_H h(r) \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$G_{4i}^a = \frac{1}{g_4} (-f_4(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

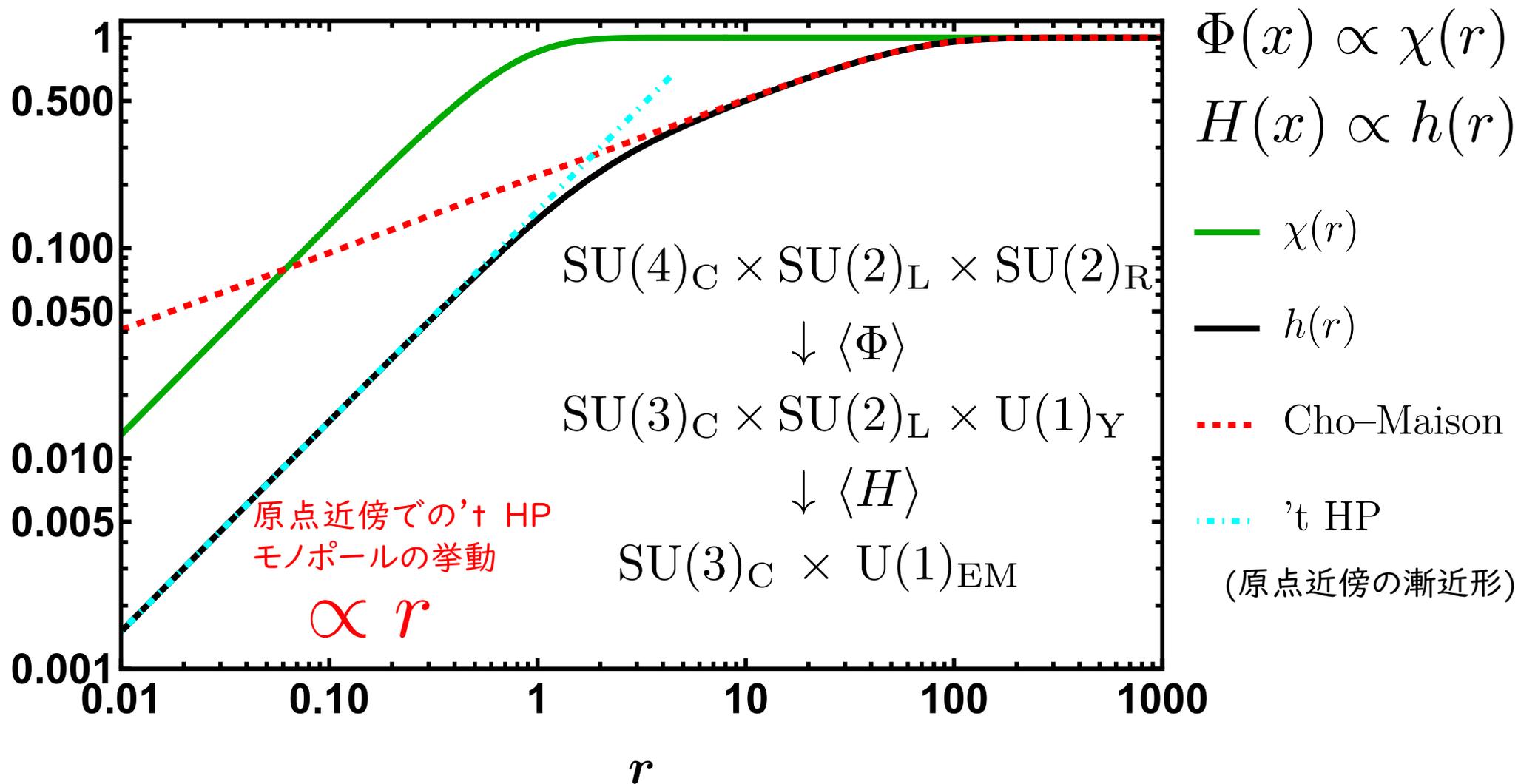
$$W_{Ri}^a = \frac{1}{g_R} (-f_R(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

$$W_{Li}^a = \frac{1}{g_L} (-f_L(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

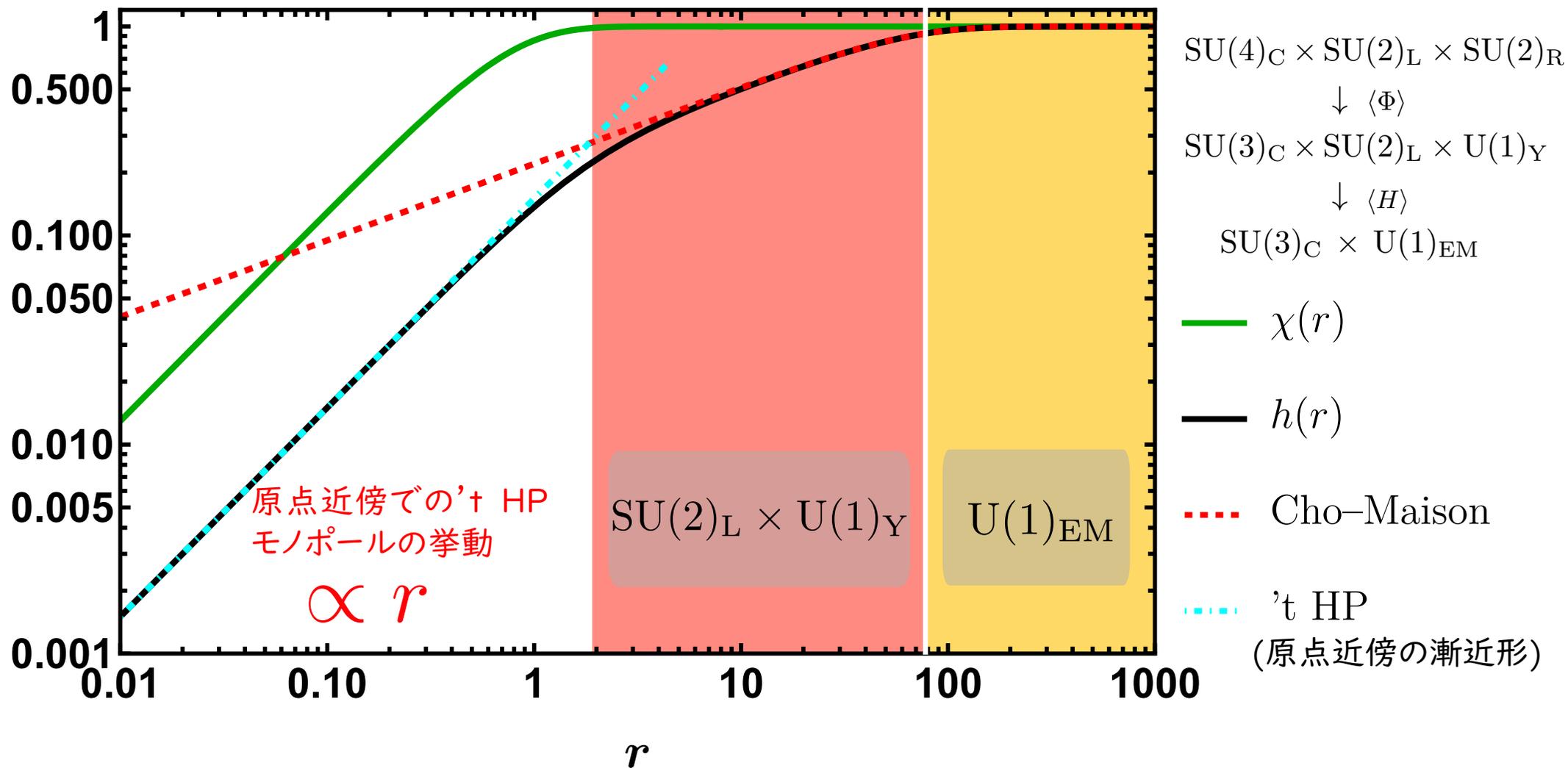


$h(r)$ の高エネルギー／低エネルギーでの挙動はどうなっているだろうか

● Pati-Salam 模型



● Pati-Salam 模型

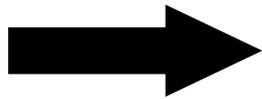


● まとめ

Cho-Maison モノポール

標準模型の中に存在し得る
空間原点でエネルギー発散

UV completion



Pati-Salam 模型

高エネルギーでは 't Hooft Polyakov モノポール

低エネルギーでは Cho-Maison モノポール

● 今後の展望

- Cho-Maison モノポールが生じるときのゲージ対称性の破れとスカラー場の表現
- ゲージ群と磁荷の関係を分類
- 現象論的な応用

● **SU(5)**

$$U(\theta, \varphi) = \exp\left(-\frac{i\varphi}{2}\sigma^3\right) \exp\left(-\frac{i\theta}{2}\sigma^2\right) \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\sigma^3\right)$$

$$U(\theta, \varphi) \sigma^3 U^\dagger(\theta, \varphi) = \hat{r}^a \cdot \sigma^a$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

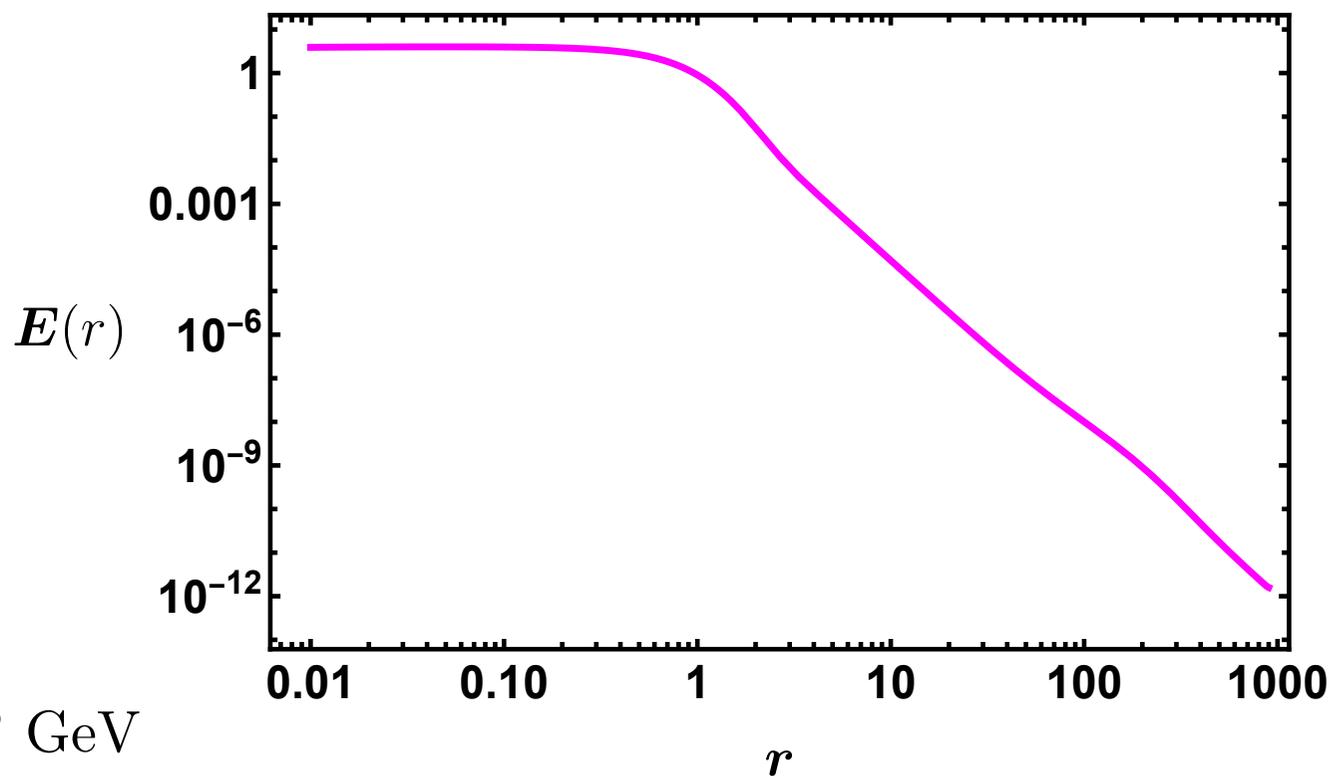
$$\langle \Phi \rangle = v_\Phi \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\langle H \rangle = \frac{v_H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \Phi \rangle \rightarrow U \langle \Phi \rangle U^\dagger$$

$$\langle H \rangle \rightarrow U \langle H \rangle$$

● エネルギーの有限性



モノポールのエネルギー $E_M = \int d\Omega E(r) \sim 10^{17} \text{ GeV}$

モノポールのサイズ $L_M \sim 10^{-31} \text{ cm}$

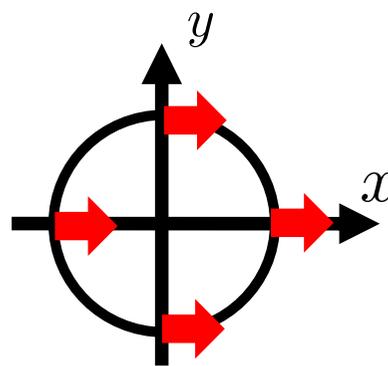
簡単な例 S^1 での説明

空間座標での無限遠で1周する間に
場の配位は何回転するか(巻き付くか)

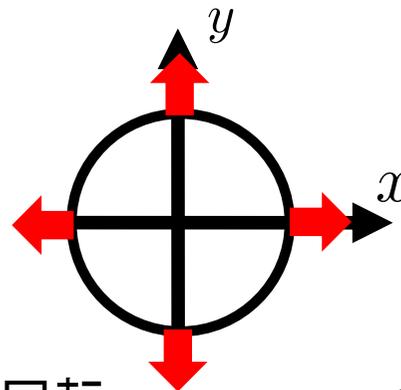
= 巻き付き数 n

巻き付き数の異なる配位同士は連続
変形によって遷移できない

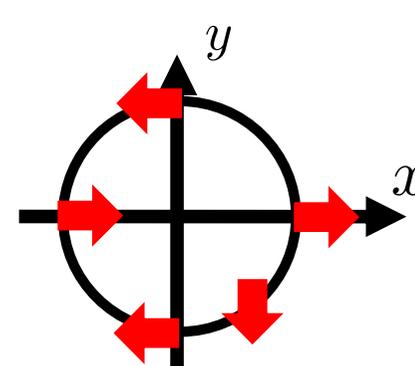
➡ **非自明な真空配位を取れる**



0回転 $n = 0$
 $\langle \Phi \rangle = v$



1回転 $n = 1$
 $\langle \Phi \rangle = ve^{i\theta}$



2回転 $n = 2$
 $\langle \Phi \rangle = ve^{i2\theta}$

- Dirac モノポール

[1] P.A.M. Dirac (1948).

[2] T.T. Wu & C.N. Yang (1969).

U(1) ゲージ理論 (電磁気学) Dirac モノポール

磁場に対するガウスの法則 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = q_M \delta^3(\vec{x})$

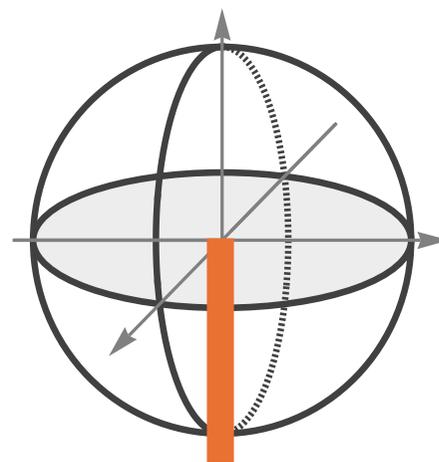
$\theta \neq \pi$ の領域では $\vec{B}_{\text{monopole}} = \frac{q_M}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} \longleftrightarrow \vec{A} = \frac{q_M}{4\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$
点電荷 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$\theta = \pi$ を含む領域では

$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{X} \neq 0$ を再現するためには**特異点**が必要

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}_{\text{monopole}} + \vec{B}_{\text{string}}$$

$$\vec{B}_{\text{string}} = q_M \Theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{z}$$

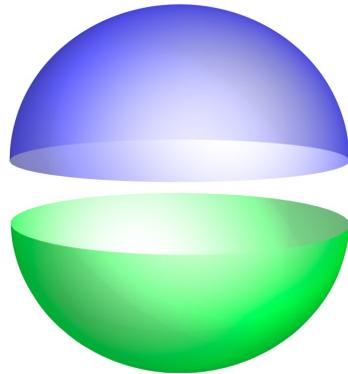


Dirac String

[1] P.A.M. Dirac (1948).

Wu-Yang の方法

2枚のパッチで
Dirac string を回避



$$A_N = \frac{q_M}{4\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \vec{e}_\varphi$$

$$A_S = \frac{q_M}{4\pi r} \frac{-1 - \cos \theta}{\sin \theta} \vec{e}_\varphi$$

ゲージ変換 $A_N = A_S + \partial_\mu \chi$ 赤道上での同一視 $A_N \sim A_S$

波動関数の一価性 \Rightarrow Dirac 量子化条件 $q_M q_E = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

[2] T.T. Wu & C.N. Yang (1969).

高エネルギー領域と低エネルギー領域でのスカラー場の振る舞い

't Hooft-Polyakov モノポール

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dr} = 2 \frac{f^2\chi}{r^2} + \lambda(\chi^2 - 1)\chi$$

原点近傍での振る舞い

$$\chi(r) \sim a_1 r + \dots$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{f(f^2 - 1)}{r^2} + \chi^2 f$$

$U(1)_Y$ の寄与が効いている

無限遠近傍

$$\rho(r) \sim 1 - \frac{a_2}{r} \exp(-\kappa r) + \dots$$

Cho-Maison モノポール

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{2} \frac{f^2\rho}{r^2} + \lambda(\rho^2 - 1)\rho$$

原点近傍

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{f(f^2 - 1)}{r^2} + \rho^2 f$$

$$\rho(r) \sim a_1 r^\delta + \dots \quad \delta = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

今からやること

- Hedgehog 配位を仮定して運動方程式を解く
- 高エネルギー領域と低エネルギー領域でのスカラー場 $H(x)$ の振る舞いを調べる

● Pati-Salam 模型

$$V(H, \Phi) = -\mu_\Phi^2 \text{Tr} \Phi^\dagger \Phi - \mu_H^2 \text{Tr} H^\dagger H + \lambda_1 (\text{Tr} \Phi^\dagger \Phi)^2 + \lambda_2 \text{Tr} \Phi^\dagger \Phi \Phi^\dagger \Phi + \lambda_3 (\text{Tr} H^\dagger H)^2 + \lambda_4 \text{Tr} H^\dagger H H^\dagger H$$

境界条件

$$\chi(0) = 0, \quad \chi(\infty) = 1,$$

$$h(0) = 0, \quad h(\infty) = 1,$$

$$f_4(0) = 1, \quad f_4(\infty) = 0,$$

$$f_L(0) = 1, \quad f_L(\infty) = 0,$$

$$f_R(0) = 1, \quad f_R(\infty) = 0.$$

$$v_\Phi^2 = \frac{\mu_\Phi^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

$$v_H^2 = \frac{\mu_H^2}{2(\lambda_3 + \lambda_4)}$$

場の方程式

$$\chi''(r) = -\frac{2}{r} \chi'(r) + \frac{(f_4(r) + f_R(r))^2}{2r^2} \chi(r) + \mu_\Phi^2 (\chi(r)^2 - 1) \chi(r)$$

$$h''(r) = -\frac{2}{r} h'(r) + \frac{(f_L(r) + f_R(r))^2}{2r^2} h(r) + \mu_H^2 (h(r)^2 - 1) h(r)$$

$$f_4''(r) = \frac{f_4(r)^2 - 1}{r^2} f_4(r) + \frac{1}{2} g_4^2 v_\Phi^2 f_4(r) \chi(r)^2$$

$$f_R''(r) = \frac{f_R(r)^2 - 1}{r^2} f_R(r) + \frac{1}{2} g_R^2 f_R(r) (v_H^2 h(r)^2 + v_\Phi^2 \chi(r)^2)$$

$$f_L''(r) = \frac{f_L(r)^2 - 1}{r^2} f_L(r) + \frac{1}{2} g_L^2 v_H^2 f_L(r) h(r)^2$$

● Pati-Salam 模型

$$V(H, \Phi) = -\mu_\Phi^2 \text{Tr} \Phi^\dagger \Phi - \mu_H^2 \text{Tr} H^\dagger H + \lambda_1 (\text{Tr} \Phi^\dagger \Phi)^2 + \lambda_2 \text{Tr} \Phi^\dagger \Phi \Phi^\dagger \Phi + \lambda_3 (\text{Tr} H^\dagger H)^2 + \lambda_4 \text{Tr} H^\dagger H H^\dagger H$$

$$\chi''(r) = -\frac{2}{r} \chi'(r) + \frac{(f_4(r) + f_R(r))^2}{2r^2} \chi(r) + \mu_\Phi^2 (\chi(r)^2 - 1) \chi(r)$$

$$v_\Phi^2 = \frac{\mu_\Phi^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

場の方程式

$$h''(r) = -\frac{2}{r} h'(r) + \frac{(f_L(r) + f_R(r))^2}{2r^2} h(r) + \mu_H^2 (h(r)^2 - 1) h(r)$$

$$v_H^2 = \frac{\mu_H^2}{2(\lambda_3 + \lambda_4)}$$

$$f_L''(r) = \frac{f_L(r)^2 - 1}{r^2} f_L(r) + \frac{1}{2} g_L^2 v_H^2 f_L(r) h(r)^2$$

$$f_R''(r) = \frac{f_R(r)^2 - 1}{r^2} f_R(r) + \frac{1}{2} g_R^2 f_R(r) (v_H^2 h(r)^2 + v_\Phi^2 \chi(r)^2)$$

$$\Phi(x) \rightarrow \langle \Phi \rangle \quad f_4''(r) = \frac{f_4(r)^2 - 1}{r^2} f_4(r) + \frac{1}{2} g_4^2 v_\Phi^2 f_4(r) \chi(r)^2$$

1段階目にSSBした後の場の方程式

$$h''(r) = -\frac{2}{r} h'(r) + \frac{(f_L(r))^2}{2r^2} h(r) + \mu_H^2 (h(r)^2 - 1) h(r)$$

$$f_L''(r) = \frac{f_L(r)}{r^2} (-1 + f_L(r)^2) + g_L^2 v_H^2 f_L(r) h(r)^2$$

Cho-Maison 場の方程式

$$\rho'' = -\frac{2}{r} \rho' + \frac{f^2}{2r^2} \rho + \lambda (\rho^2 - 1) \rho$$

$$f'' = \frac{f}{r^2} (-1 + f^2) + \frac{g^2}{4} f \rho^2$$

